

Hartmut Ernst, Jochen Schmidt und Gerd Beneken

Grundkurs Informatik

Lösungen zu den Übungsaufgaben, 6. Auflage 2016

Stand: 19. Januar 2017

Springer Vieweg

Inhaltsverzeichnis

1	Lösungen zu Kapitel 1 – Einführung	1
2	Lösungen zu Kapitel 2 – Nachricht und Information	19
3	Lösungen zu Kapitel 3 – Codierung	33
4	Lösungen zu Kapitel 4 – Verschlüsselung	60
5	Lösungen zu Kapitel 5 – Computerhardware und Maschinensprache	66
6	Lösungen zu Kapitel 6 – Rechnerarchitektur	77
7	Lösungen zu Kapitel 7 – Rechnernetze	78
8	Lösungen zu Kapitel 8 – Betriebssysteme	79
9	Lösungen zu Kapitel 9 – Datenbanken	80
10	Lösungen zu Kapitel 10 – Automatentheorie und formale Sprachen	81
11	Lösungen zu Kapitel 11 – Algorithmen – Berechenbarkeit und Komplexität	92
12	Lösungen zu Kapitel 12 – Suchen und Sortieren	99
13	Lösungen zu Kapitel 13 – Bäume und Graphen	106

1 Lösungen zu Kapitel 1 – Einführung

Übungsaufgaben zu den Kapiteln 1.1 und 1.2

A 1.1 (T0) Aus welchen Wissenschaften ist die Informatik in erster Linie hervorgegangen? Welche weiteren Wissenschaften sind für die Informatik von Bedeutung?

Lösung

Historisch gesehen ist die Informatik in erster Linie aus der Mathematik und der Elektrotechnik hervorgegangen. Von Bedeutung sind daneben auch andere Ingenieurwissenschaften, außerdem Physik (insbesondere die Festkörperphysik), Linguistik und BWL sowie zahlreiche Disziplinen in speziellen Anwendungen, beispielsweise Medizin, Biologie und Medientechnik.

A 1.2 (T0) Was bedeutet „Kerninformatik“?

Lösung

Zur Abgrenzung gegen die angewandte Informatik fasst man die theoretische, praktische und technische Informatik unter dem Oberbegriff Kerninformatik (auch allgemeine Informatik) zusammen.

A 1.3 (T0) Grenzen Sie die Begriffe „technische Informatik“, „Technik der Informatik“ und „Informatik in der Technik“ voneinander ab.

Lösung

Arbeitsgebiet der „technischen Informatik“ oder treffender der „Technik der Informatik“ ist die Erforschung und Anwendung ingenieurwissenschaftlicher und physikalischer Grundlagen und Methoden für die Entwicklung und den Bau von Rechenanlagen und Peripheriesystemen. Die „Informatik in der Technik“ ist derjenige Teilbereich der angewandten Informatik, der sich mit der Entwicklung, Anwendung und Pflege von Programmen in technischen Anwendungen, beispielsweise im Maschinenbau, befasst. Im Sprachgebrauch ist manchmal die Abgrenzung zur technischen Informatik fließend.

A 1.4 (T0) Auf wen geht die binäre Arithmetik und Logik zurück?

Lösung

Erste Ideen stammen von Gottfried Wilhelm von Leibnitz (1646-1716), die detaillierte mathematische Ausarbeitung (Boolesche Algebra) lieferte George Boole (1815-1864).

A 1.5 (T1) Warum werden beim Morse-Alphabet manche Buchstaben mit kurzen und manche mit langen Folgen der Zeichen „.“ und „-“ dargestellt? Handelt es sich beim Morse- Alphabet um eine binäre Codierung?

Lösung

Um Zeit bei der Übertragung zu sparen, hat man damals schon, lange bevor es Computer gab, häufig auftretende Zeichen mit kurzen und selten auftretende Zeichen mit langen Folgen von „.“ und „-“ dargestellt. Beim Morse-Alphabet handelt es sich nicht um eine binäre Codierung, da neben „.“ und „-“ als drittes Zeichen die Pause verwendet wird.

A 1.6 (T0) Seit wann gibt es in Deutschland eigenständige Informatik-Studiengänge und wer hat die Entwicklung der Informatik in Deutschland maßgeblich geprägt?

Lösung

Ab ca. 1965 wurde Informatik als Spezialisierung in Mathematik- und Elektrotechnik-Studiengängen gelehrt. 1970 wurde an der Technischen Universität München (TUM) unter Leitung von F. L. Bauer mit dem ersten eigenständigen Studiengang Informatik in Deutschland begonnen.

A 1.7 (T0) Beschreiben Sie ausführlich den Begriff „4. Computergeneration“.

Lösung

Die ab ca. 1975 vorherrschende 4. Computergeneration ist durch den Einsatz von höchstintegrierten Schaltkreisen (Very Large Scale Integration, VLSI) und Mikroprozessoren (Intel) gekennzeichnet. Typische Vertreter dieser Generation sind Personal-Computer (Apple, Commodore, IBM) und erste Super-Computer der Firmen Control Data Corporation (CDC) und Cray. Auch elektronische Taschenrechner sind hier zu nennen. Kennzeichnend für die 4. Generation sind auf Software-Seite die Entwicklung des Betriebssystems MS-DOS durch Microsoft sowie die Entwicklung der Programmiersprache C und des Betriebssystems UNIX.

A 1.8 (T1) Charakterisieren Sie die Computergenerationen 0 bis 5 jeweils durch ein Schlagwort für das innovative Funktionsprinzip, geben Sie die ungefähre Zeit der ersten Einführung an und nennen Sie außerdem ein typisches Rechnermodell für jede Computergeneration.

Lösung

Generation	Innovatives Prinzip	Entstehungsjahr	Beispiel
0.	Elektromechanische Komponenten	1941	Z3, Mark1
1.	Elektronenröhren	1946	ENIAC, PERM
2.	Transistoren	1952	IBM 701
3.	ICs	1960	PDP8
4.	VLSI	1975	PCs, Großrechner
5.	Parallele Strukturen, KI	1985	Connection Machine

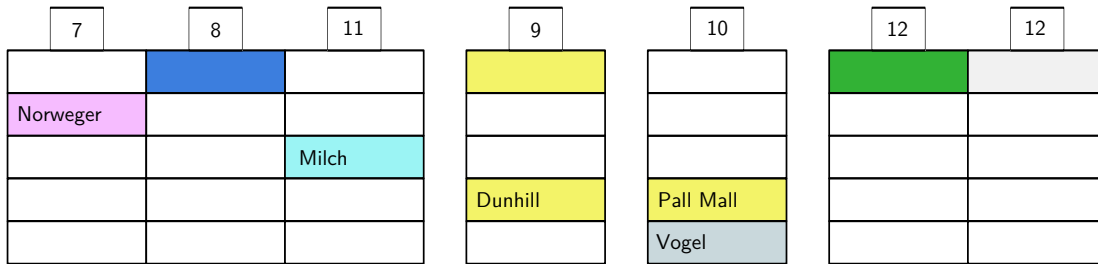
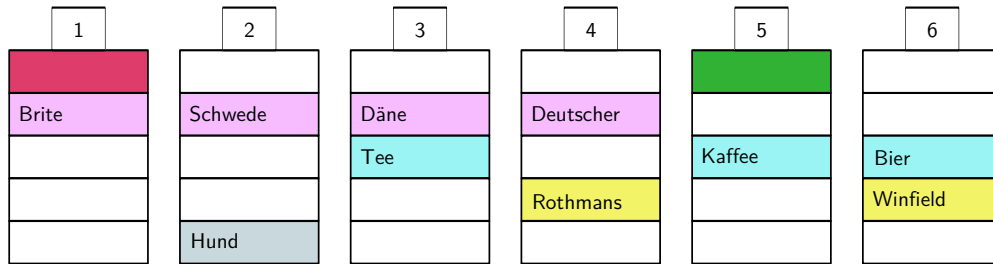
A 1.9 (L3) Die folgende Aufgabe stammt angeblich von Albert Einstein. Es wird behauptet, dass nur ca. 2% der Weltbevölkerung in der Lage seien, diese Aufgabe innerhalb von ca. einer Stunde zu lösen. Gehören Sie zu diesen schlauesten 2%? Zur Lösung ist kein Trick erforderlich, nur pure Logik.

1. Es gibt fünf Häuser mit je einer anderen Farbe.
2. In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität.
3. Jeder Hausbewohner bevorzugt ein bestimmtes Getränk, hält ein bestimmtes Haustier und raucht eine bestimmte (zu Einsteins Zeiten populäre) Zigarettenmarke.
4. Keine der fünf Personen bevorzugt das gleiche Getränk, raucht die gleichen Zigaretten oder hält das gleiche Tier wie irgendeine der anderen Personen.
5. Der Däne trinkt gerne Tee.
Der Brite lebt im roten Haus.
Der Schwede hält einen Hund.
Der Deutsche raucht Rothmanns.
Der Norweger wohnt im ersten Haus.
Der Winfield-Raucher trinkt gerne Bier.
Der Besitzer des grünen Hauses trinkt Kaffee.
Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
Der Besitzer des gelben Hauses raucht Dunhill.
Die Person, die Pall Mall raucht, hat einen Vogel.
Der Mann, der im mittleren Haus wohnt, trinkt Milch.
Das grüne Haus steht unmittelbar links vom weißen Haus.
Der Mann mit dem Pferd wohnt neben dem Dunhill-Raucher.
Der Marlboro-Raucher wohnt neben dem, der eine Katze hält.
Der Mann, der Marlboro raucht, hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.

Frage: Wer hat einen Fisch?

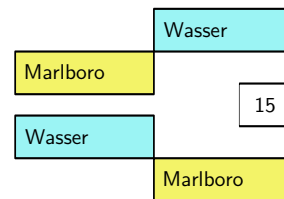
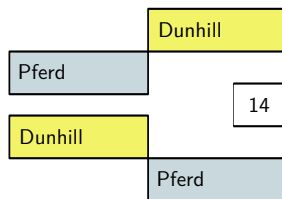
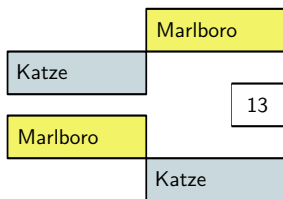
Lösung

1. Die 15 Regeln kann man wie folgt grafisch darstellen:



Erstes Haus, neben dem blauen. Mittleres Haus

Grünes Haus, links vom weißen.

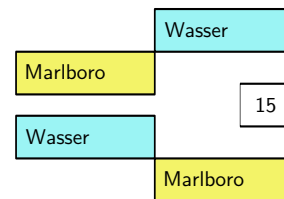
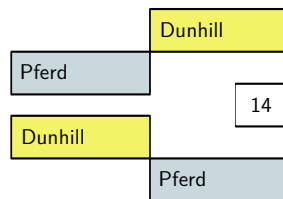
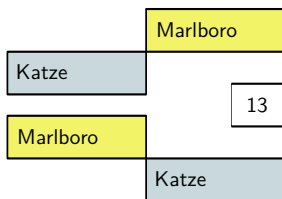


2. Man versucht nun Regeln zu kombinieren:

Die Regeln 5 und 12 und die Regeln 1 und 11 können zusammengefasst werden. Damit liegt die Reihenfolge der Farben fest und Regel 9 lässt sich integrieren. Die Häuserzeile ist jetzt komplett.

7	9	8	1	11	5	12
Norweger		Brite				
		Milch	Kaffee			
Dunhill						

2	3	4	6	10
Schwede	Däne	Deutscher		
	Tee		Bier	
		Rothmans	Winfield	Pall Mall
Hund				Vogel



3. Weitere Kombinationen:

Regel 14 kann noch eindeutig eingefügt werden, aber weitere Regeln sind nicht eindeutig. Es stehen folgende Möglichkeiten zur Verfügung:

2 in 5 oder 12.

3 oder 6 in 14/8 oder 12.

4 in 14/8 oder 5 oder 12.

10 in 1/11 oder 5 oder 12.

7	9	8	14	1	11	5	12
Norweger				Brite			
				Milch	Kaffee		
Dunhill							
	Pferd						

2	3	4	6	10
Schwede	Däne	Deutscher		
	Tee		Bier	
		Rothmans	Winfield	Pall Mall
Hund				Vogel

Kombination von 13 und 15 ergibt die folgenden vier Möglichkeiten:

Wasser		13	15		Wasser
a)	Marlboro			Marlboro	c)
		Katze		Katze	
Wasser				Wasser	
b)	Marlboro			Marlboro	d)
Katze				Katze	

4. Man probiert zwei Varianten, der Rest ist wieder eindeutig:

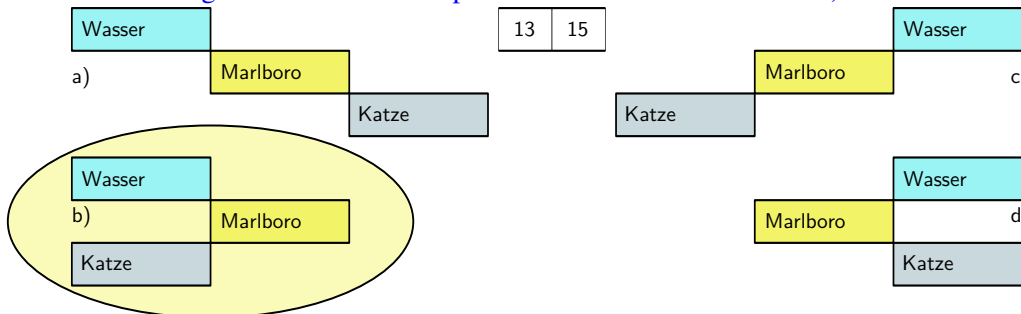
Für 2 gibt es nur die Alternativen 2 in 5 oder 2 in 12. Der Versuch 2 in 5 führt rasch zu einem Widerspruch.

Man setzt daher 2 in 12. Das weitere Vorgehen ist Jetzt wieder eindeutig. Man setzt ein:

3 in 14/8, 4 in 5, 6 in 12 und 10 in 1/11.

		3		10				6	
7	9	8	14	1	11	4	5	2	12
Norweger	Däne	Brite	Deutscher	Schwede					
	Tee	Milch	Kaffee	Bier					
Dunhill		Pall Mall	Rothmans	Winfield					
	Pferd	Vogel		Hund					

Von den vier Möglichkeiten für 13/15 passt offenbar nur die Variante b).



5. Die Lösung:

Fügt man noch 13/15 b) ein, so folgt, dass der Deutsche einen Fisch hat.

		3		10				6	
13	15	8	14	1	11	4	5	2	12
7	9								
Norweger	Däne	Brite	Deutscher	Schwede					
Wasser	Tee	Milch	Kaffee	Bier					
Dunhill	Marlboro	Pall Mall	Rothmans	Winfield					
Katze	Pferd	Vogel		Hund					

Übungsaufgaben zu Kapitel 1.3

A 1.10 (T0) Was versteht man unter EVA, HIPO, DFÜ, 4GL, ADA, CASE und KISS?

Lösung

EVA: Eingabe, Verarbeitung, Ausgabe

HIPO: Hierarchical Input, Processing and Output, das englische Äquivalent zu EVA

DFÜ: Datenfernübertragung

4GL: Fourth Generation Language, Sprachen der vierten Generation (z. B. SQL)

ADA: Eine Programmiersprache, benannt nach Ada Countess of Lovelace

CASE: Computer Aided Software Engineering

KISS: Keep it stupid and simple

A 1.11 (T1) Was sind die typischen Unterschiede zwischen Digital-, Analog- und Hybridrechnern?

Lösung

Digitalrechner Zahlen sind diskret mit endlicher Stellenzahl als Binärzahlen dargestellt. Die Abarbeitung erfolgt seriell oder teilweise auch parallel Schritt für Schritt nach einem Programm, das einen Algorithmus implementiert. Digitalrechner sind die verbreitetste Art heutiger Rechner.

Analogrechner Zahlenwerte werden als analoge, d. h. kontinuierliche physikalische Größen dargestellt. In üblichen elektronischen Analogrechnern sind dies zeitlich veränderliche elektrische Spannungen und Ströme. Die Abarbeitung erfolgt entsprechend der Schaltung, die für jedes Problem neu konfiguriert werden muss. Anwendungsgebiete sind vor allem die Lösung von Differentialgleichungen sowie Simulationen komplexer Systeme. Werden heute praktisch nicht mehr verwendet.

Hybridrechner Verbindung von Digital- und Analogrechnern. Der Digitalteil dient dabei hauptsächlich zur Eingabe und Ausgabe sowie für die Festlegung der Konfiguration der Komponenten des Analogteils. Die Kommunikation zwischen Digitalteil und Analogteil erfolgt über D/A- und A/D-Wandler. Werden heute praktisch nicht mehr verwendet.

A 1.12 (M1) Ein Rechner habe 32 Datenleitungen und 21 Adressleitungen.

- Wie viele Bits bzw. Bytes hat ein Wort dieser Anlage?
- Wie lautet die größte damit in direkter binärer Codierung darstellbare Zahl?
- Wie groß ist der Adressraum, d. h. wie viele Speicherzellen sind adressierbar?
- Wie groß ist die maximal speicherbare Datenmenge in MByte?

Lösung

- Ein Wort dieser Anlage umfasst 32 Bits bzw. 4 Bytes.
- Das größte in direkter binärer Codierung darstellbare Wort besteht aus 32 Einsen:
 $11111111\ 11111111\ 11111111\ 11111111_2 = 2^{32} - 1 = 4294967295$
- Die Anzahl der adressierbaren Speicherzellen ist $2^{21} = 2097152$
- Die maximal speicherbare Datenmenge ist $2^{21} \cdot 4 \text{ Byte} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 8 \text{ Byte} = 8 \text{ MByte}$

A 1.13 (M1) Eine Digitalkamera habe eine Auflösung von 3318×2488 Pixeln (Bildpunkten). Jedes Pixel besteht aus den Farbkomponenten r , g , und b , die jeweils ganzzahlige Werte zwischen $0 < r, g, b < 255$ annehmen können. Wie groß ist der Speicherbedarf in MByte für ein solches Bild? Welche Bandbreite wäre für die Filmdarstellung von 30 Bildern/s nötig?

Lösung

Speicherbedarf pro Bild: $3318 \cdot 2488 \cdot 3 \text{ Byte} = 24\,765\,552 \text{ Byte} \approx 23,6 \text{ MByte}$

Bandbreite für die Filmdarstellung von 30 Bildern/s:

$30 \cdot 24\,765\,552 \text{ Byte/s} = 742\,966\,560 \text{ Byte/s} \approx 708,5 \text{ MByte/s}$

A 1.14 (T1) Nennen Sie Kriterien zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit eines Computers.

Lösung

Typ der CPU, Datenbusbreite, Adressbusbreite, Prozessor-Taktrate und Bus-Taktrate bzw. Busbandbreite, Benchmarks (MIPS, FLOPS, etc.), installierter Speicher, Art und Anzahl der Peripheriegeräte, Betriebssystem, verfügbare Software, Ausbaufähigkeit, Vernetzbarkeit, Ausfallsicherheit, Kompatibilität, Hersteller, Preis. Generell ist zu beachten, dass die Wichtung der verschiedenen Kriterien von der Anwendung und weiteren Umständen wie dem finanziellen Rahmen, dem Platzbedarf etc. abhängt.

A 1.15 (T0) Was versteht man unter dem Systembus eines Rechners?

Lösung

Alle zur Steuerung des Rechners nötigen Leitungen, z. B. Read enable, Write enable, Data ready etc.

A 1.16 (T0) Nennen Sie alle Ihnen bekannten Möglichkeiten zur Speicherung von Daten mit Hilfe eines Computers.

Lösung

Magnetische Aufzeichnung: Festplatten, Magnetbänder

Optische Platten: CD-ROM, DVD, Blu-Ray Disc

Halbleiterspeicher: RAM, ROM, PROM, EPROM, EEPROM, Flash-EPROM, SSD

A 1.17 (M1) Berechnen Sie die maximal mögliche Datenrate in MByte/s für einen 64 Bit breiten und mit 180 MHz getakteten Bus.

Lösung

Man berechnet man die resultierende Datenrate r wie folgt:

$$r = 64 \text{ Bit} \cdot 180 \text{ MHz} = 64 \cdot 180 \cdot 10^6 \text{ Bit/s} = \frac{64 \cdot 180 \cdot 10^6}{8 \cdot 1024 \cdot 1024} \text{ MByte/s} \approx 1\,373 \text{ MByte/s}$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 1.4

A 1.18 (M0) Wandeln Sie die folgenden Binärzahlen in oktale, hexadezimale und dezimale Darstellung um: 11 0101; 11 0111 0110 1001; 111,101 und 11 0101,0001 001.

Lösung

binär	11 0101	11 0111 0110 1001	111,101	11 0101,0001 001
oktal	65	33551	7,5	25,044
dezimal	53	14185	7,625	21,0703125
hexadezimal	35	3769	7,A	15,12

A 1.19 (M1) Wandeln Sie die folgenden Dezimalzahlen ins Binär-, Oktal- und Hexadezimalsystem um: 43; 6789; 26,4375; 102,375.

Lösung

dezimal	43	6789	26,4375	123,32
binär	101011	1101010000101	11010,0111	<u>1111011,01010001111010111</u>
oktal	53	15205	32,7	143,24365605075341217270
hexadezimal	2B	1A85	1A,34	7B,51EB8

Für kleine Zahlen kann die Umwandlung am schnellsten mit Hilfe einer Tabelle der Potenzen der verwendeten Basen 2, 8 und 16 geschehen, die man mit etwas Übung (zumindest für Basis 2) auswendig weiß:

2^k	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
8^k	1	8	64	512	4096	32768							
16^k	1	16	256	4096	65536								
2^{-k}	0,5		0,25		0,125		0,0625		0,03125				
8^{-k}	0,125		0,015625		0,001953125								
16^{-k}	0,0625		0,00390625		0,000244140625								

Für größere Zahlen verwendet man am günstigsten das Horner-Schema mit fortgesetzter Division durch die gewünschte Basis, also 2 für das Binärsystem, 8 für das Oktalsystem und 16 für das Hexadezimalsystem. Die gesuchte Stelle ist dann jeweils der Divisionsrest.

Bei der Umwandlung von Nachkommastellen muss man durch den Kehrwert der Basis dividieren, also mit der Basis multiplizieren. Dem Divisionsrest entspricht dann der Übertrag.

Die Umwandlung von Binärzahlen in Hexadezimalzahlen erfolgt am einfachsten durch Zusammenfassen von jeweils vier Binärstellen zu einer Hexadezimalstelle. Bei Vorkommastellen wird dabei mit dem niederwertigsten Bit begonnen und vom Komma aus nach links gearbeitet. Bei Nachkommastellen wird vom Komma aus nach rechts gearbeitet. Für die Umwandlung von Binärzahlen in Oktalzahlen fasst man jeweils drei Bit zusammen.

A 1.20 (M2) Wandeln sie 497,888 ins Fünfersystem und 768,3 ins Siebenersystem um.

Lösung

$$497,888_{10} = 3442,421_5, 768,3_{10} = 2145,2046_7$$

Anmerkung: Einen periodischen Bruch wandelt man in einen echten Bruch um, indem man die Periode durch eine gleichlange Folge dividiert, die aus der höchsten Grundziffer gebildet wurde. Also beispielsweise: $0,\overline{2} = 2/4$ im Fünfersystem, $0,\overline{1234} = 1234/9999$ im Zehnersystem.

A 1.21 (M2) Führen Sie die folgenden binären Rechenoperationen durch:

110101 + 11001	101,1101 + 1110,11	111011 + 11101	110,0111 + 1101,101
111011 - 10111	110,1001 - 101,11011	110001 - 1101101	1011,101 - 1001,1101
11011 · 1011	101,11 · 1011,101	1101 · 1011	111,01 · 1,0101
101000010 : 1110	1011,11 : 10,1111	111,01 : 10	1010,11 : 10,1

Lösung

Addition:

110101 53	101,1101 5,8125	111011 59	110,0111 6,4375
+ 11001 25	+ 1110,1100 14,7500	+ 11101 29	+ 1101,1010 13,6250
= 1001110 78	= 10100,1001 20,5625	= 1011000 88	= 10100,0001 20,0625

Subtraktion:

Bei der Subtraktion $a - b$ wird im Zweierkomplement gerechnet. Dabei bleibt a unverändert. Von b wird zunächst das Stellenkomplement (St.K.) durch bitweise Inversion gebildet und dann daraus das Zweierkomplement (Zw.K.) durch Addition einer 1 in der letzten Stelle (LSB). Sodann werden a und das Zweierkomplement von b wie gewohnt addiert. Ein über die verwendete Stellenzahl hinausgehender Überlauf wird abgeschnitten. Hat die resultierende Zahl ein MSB von 0, dann ist sie positiv; bei einem MSB von 1 negativ. Der Zahlenwert des Ergebnisses kann dann durch Bildung des Zweierkomplements ermittelt werden.

0010111 23	0101,11011 5,84375	01101101 109	01001,1101 9,8125
1101000 St.K.	1010,00100 St.K.	10010010 St.K.	10110,0010 St.K.
1101001 Zw.K.	1010,00101 Zw.K.	10010011 Zw.K.	10110,0011 Zw.K.
0111011 59	0110,10010 6,56250	00110001 49	01011,1010 11,6250
= 0100100 36	= 0000,10111 0,71875	= 11000100 -60	= 00001,1101 1,8125
		00111011 St.K.	
		00111100 Zw.K. = 60	

Multiplikation:

<u>11011 · 1011</u> 27 · 11 = 297	<u>10111 · 1011101</u> 5,75 · 11,625 = 66,84375
11011	10111
11011	10111
11011	10111
100101001 Ergebnis	10111
	100001011011 → 1000010.11011
<u>1101 · 1011</u> 13 · 11 = 143	<u>11101 · 10101</u> 7,25 · 1,3125 = 9,515625
1101	11101
1101	11101
1101	11101
10001111 Ergebnis	1001100001 → 1001,100001

Division:

$$\begin{array}{r}
 101000010 : 1110 = 10111 \quad 322 : 14 = 23 \\
 \underline{-1110} \\
 11000 \\
 \underline{-1110} \\
 10101 \\
 \underline{-1110} \\
 1110 \\
 \underline{-1110} \\
 0000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1011,11 : 10,1111 = 100 \quad 11,75 : 2,9375 = 4 \\
 10111100 : 101111 = 100 \\
 \underline{-101111} \\
 00000000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 111,01 : 10 = 11,101 \quad 7,25 : 2 = 3,625 \\
 \underline{-10} \\
 11 \\
 \underline{-10} \\
 10 \\
 \underline{-10} \\
 010 \\
 \underline{-10} \\
 00
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1010,11 : 10,1 = 100,01\overline{0011} \quad 10,75 : 2,5 = 4,3 \\
 10101,1 : 101 = 100,01\overline{0011} \\
 \underline{-101} \\
 00110 \\
 \underline{-101} \\
 1000 \\
 \underline{-101} \\
 110 \\
 \underline{-101} \\
 \text{periodisch}
 \end{array}$$

A 1.22 (M1) Berechnen Sie $647 - 892$ im Dezimalsystem unter Verwendung der Zehnerkomplement-Methode.

Lösung

Die Subtraktion lässt sich in Analogie zur Zweierkomplement-Darstellung im Binärsystem auch in einem beliebigen anderen Zahlensystem in Komplement-Darstellung ausführen. Dabei wird das Stellenkomplement einer Zahl durch Ergänzen der einzelnen Ziffern auf die höchste Grundziffer bestimmt. So ist das Stellenkomplement von 4 im Zehnersystem $9 - 4 = 5$ und beispielsweise im Fünfersystem $5 - 4 = 1$. Führt man als Beispiel die Subtraktion $647 - 892$ im Dezimalsystem mit 4 Stellen unter Verwendung der Zehnerkomplement-Methode durch so ergibt sich:

$$\begin{array}{r}
 9999 \\
 \underline{-0892} \\
 9107 \text{ Stellenkomplement von } 892 \\
 + \quad 1 \\
 \hline
 9108 \text{ Zehnerkomplement von } 892 \\
 +0647 \\
 \hline
 9755 \text{ Ergebnis im Zehnerkomplement, negativ} \\
 \\
 9999 \\
 \underline{-9755} \\
 0244 \text{ Stellenkomplement} \\
 + \quad 1 \\
 \hline
 0245 \text{ Ergebnis} \rightarrow 9755 \text{ im Zehnerkomplement entspricht } -245
 \end{array}$$

Eine genauere Betrachtung der Rechnung zeigt, dass die Durchführung der Subtraktion in Zehnerkomplement-Darstellung offenbar nur eine andere Schreibweise ist: $999 - (647 + (999 - 892 + 1)) + 1 = 245$.

A 1.23 (T1) Warum ist die Subtraktion mit der Komplement-Methode gerade im Binärsystem so vorteilhaft?

Lösung

Das Zweierkomplement wurde eingeführt, um die Subtraktion durch Rückführung auf die Komplementbildung und die Addition zu vermeiden. Wie die vorherige Aufgabe zeigt, ist aber im Zehnersystem für die Komplementbildung eine Subtraktion erforderlich. Dies gilt auch für alle anderen Ziffernsysteme, mit Ausnahme des Dualsystems. Nur dort kann das Komplement sehr einfach durch bitweise Inversion und Addition einer 1 durchgeführt werden, so dass tatsächlich die Subtraktion vermieden werden kann.

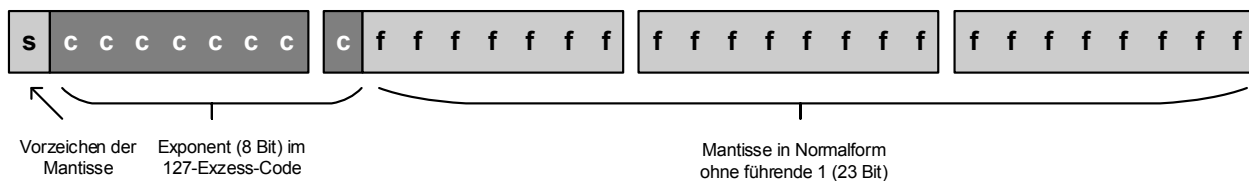
A 1.24 (M2) Schreiben Sie als 32-Bit Gleitkommazahlen:

0	64,625	-3258	0,0006912	$-21,40625 \cdot 10^4$
-2	75,4	$-4,532 \cdot 10^3$	71,46875	-439,1248

Lösung

Bei der Umwandlung einer Dezimalzahl in eine kurze binäre Gleitkommazahl geht man dementsprechend folgendermaßen vor:

1. Die Dezimalzahl wird in eine Binärzahl umgewandelt, ggf. mit Nachkommastellen.
2. Das Komma wird so weit verschoben, bis die Normalform $m = 1, f_0 f_1 \dots f_{22}$ erreicht ist. Bei Verschiebung um je eine Stelle nach links wird der Exponent e der Basis 2 um eins erhöht, bei Verschiebung nach rechts um eins erniedrigt.
3. Das Vorzeichen s der Zahl (positiv: 0, negativ: 1) wird in das MSB des ersten Byte geschrieben.
4. Zum Exponenten e wird 127 addiert, das Ergebnis $c = e + 127$ wird in binäre Form mit 8 Stellen umgewandelt. Ist der Exponent positiv, so hat das führende Bit von c den Wert 1, sonst hat es den Wert 0. Die 8 Bit des Ergebnisses c werden im Anschluss an das Vorzeichenbit in die letzten 7 Bit des ersten und in das MSB des zweiten Byte eingefügt.
5. In die Bytes 2 (anschließend an das bereits für den Exponenten verwendete MSB), 3 und 4 werden schließlich die Nachkommastellen $f_0 f_1 \dots f_{22}$ der Mantisse eingefügt.
6. Ist $c = 00000000$, also $e = -127$, so werden denormalisierte Gleitkommazahlen verwendet. Diese lauten $0, f_0 f_1 \dots f_{22} \cdot 2^{-126}$. Details dazu werden weiter unten erläutert.



Im folgenden bezeichnet d die Zahl in Dezimaldarstellung, b die Zahl in Binärdarstellung, e den Exponenten, c den Exponenten mit Bias und g die Zahl im kurzen IEEE Gleitpunktformat.

$$d = 0$$

$$b = 00000000\ 00000000\ 00000000\ 00000000$$

$$e = -127, c = e + 127 = 0$$

$$g = 00000000\ 00000000\ 00000000\ 00000000 = 00000000_{16}$$

Anmerkung: Es gibt auch eine -0 , diese sieht so aus:

$$g = 10000000\ 00000000\ 00000000\ 00000000 = 80000000_{16}$$

$$d = 64,625$$

$$b = 1000000,101 = 1,000000101 \cdot 2^6$$

$$e = 6_{10}, c = 6_{10} + 127_{10} = 133_{10} = 10000101_2$$

$$g = 01000010100000010100000000000000 = 42814000_{16}$$

$$d = -3258$$

$$b = 110010111010 = 1,10010111010 \cdot 2^{11}$$

$$e = 11_{10}, c = 11_{10} + 127_{10} = 138_{10} = 10001010_2$$

$$g = 11000101010010111010000000000000 = C34BA000_{16}$$

$$d = 0,0006912$$

$$b = 0,002D4C696 \dots_{16} = 0,000000000010110101001100011010010110$$

$$= 1,0110101001100011010010110 \cdot 2^{-11}$$

$$e = -11_{10}, c = -11_{10} + 127_{10} = 116_{10} = 01110100_2$$

$$g = 00111010001101010011000110100101 = 3A3531A5_{16}$$

$$d = -21,40625 \cdot 10^4 = -214062,5$$

$$b = 3442E,8_{16} = 00110100010000101110,1 = 1,101000100001011101 \cdot 2^{17}$$

$$e = 17_{10}, c = 17_{10} + 127_{10} = 144_{10} = 10010000_2$$

$$g = 11001000010100010000101110100000 = C8510BA0_{16}$$

$$d = -2$$

$$b = 10 = 1,0 \cdot 2^1$$

$$e = 1_{10}, c = 1_{10} + 127_{10} = 128_{10} = 10000000_2$$

$$g = 11000000000000000000000000000000 = C0000000_{16}$$

$$d = 75,4$$

$$b = 1001011,0\overline{1110} \approx 1,00101101100110110011001 \cdot 2^6$$

$$e = 6_{10}, c = 6_{10} + 127_{10} = 133_{10} = 10000101_2$$

$$g = 01000010100101101100110110011001 = 4296CD99_{16}$$

$$d = -4,532 \cdot 10^3 = -4532$$

$$b = 1000110110000 = 1,00011011 \cdot 2^{12}$$

$$e = 12_{10}, c = 12_{10} + 127_{10} = 139_{10} = 10001011_2$$

$$g = 11000101100011011000000000000000 = C58D8000_{16}$$

$$d = 71,46875$$

$$b = 1000111,01111 = 1,00011101111 \cdot 2^6$$

$$e = 6_{10}, c = 6_{10} + 127_{10} = 133_{10} = 10000101_2$$

$$g = 01000010100011101111000000000000 = 428EF000_{16}$$

$$d = -439,1248$$

$$b \approx 110110111,000111111111001 = 1,10110111000111111111001 \cdot 2^8$$

$$e = 8_{10}, c = 8_{10} + 127_{10} = 135_{10} = 10000111_2$$

$$g = 1100001111011011100011111111001 = C3DB8FF9_{16}$$

A 1.25 (M2) Geben Sie die folgenden normalisierten und denormalisierten 32-Bit Gleitkommazahlen an: Die größte, die kleinste, die kleinste größer Null, die größte negative.

Lösung

Die größte 32-Bit Gleitpunktzahl:

Der größte nutzbare Exponent ist $e = 127_{10}$, dann ist $c = 127_{10} + 127_{10} = 254_{10} = 1111110_2$. Die größte Mantisse hat dreiundzwanzig 1en. Damit gilt:

$$\begin{aligned} g_{max} &= 01111111011111111111111111111111 = 7F7FFF_{16} \\ &= 1.111111111111111111111111 \cdot 2^{127} \\ &= (2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127} \approx 3,4028234664 \cdot 10^{38}. \end{aligned}$$

Die kleinste 32-Bit Gleitpunktzahl:

$$\begin{aligned} g_{min} &= -g_{max} = 11111111011111111111111111111111 = FF7FFF_{16} \\ &= -1.111111111111111111111111 \cdot 2^{127} \\ &= -(2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127} \approx -3,4028234664 \cdot 10^{38}. \end{aligned}$$

Die kleinste 32-Bit Gleitpunktzahl größer Null: Hier ist zu berücksichtigen, dass von den normalisierten Gleitpunktzahlen mit der Mantisse $1,f$ zu den denormalisierten Gleitpunktzahlen mit der Mantisse $0,f$ und dem festen Exponenten 2^{-126} übergegangen werden muss. Dies ist durch den Eintrag 0 für den Exponenten c kenntlich gemacht. Die kleinste 32-Bit positive Gleitpunktzahl hat also eine 1 in der letzten Stelle der Mantisse:

$$\begin{aligned} g_{min+} &= 00000000000000000000000000000001 = 00000001_{16} \\ &= 2^{-23} \cdot 2^{-126} = 2^{-149} \approx 1,4012984 \cdot 10^{-45}. \end{aligned}$$

Die größte negative 32-Bit Gleitpunktzahl:

$$\begin{aligned} g_{min-} &= -g_{min+} = 10000000000000000000000000000001 = 80000001_{16} \\ &= -2^{-23} \cdot 2^{-126} = -2^{-149} \approx -1,4012984 \cdot 10^{-45}. \end{aligned}$$

A 1.26 (M2) Berechnen Sie näherungsweise π unter Verwendung der ersten 11 Glieder der Leibnitz-Formel:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Rechnen Sie stellenrichtig im Zehnersystem mit Gleitkommazahlen in Normalform und Mantissen mit drei Nachkommastellen, also $0,d_1d_2d_3 \cdot 10^e$ mit $d_1 > 0$. Ermitteln Sie die günstigste Strategie hinsichtlich der Minimierung der Abbrechfehler: (1) Abarbeitung der Terme von links nach rechts, (2) Abarbeitung der Terme von rechts nach links, (3) getrennte Addition aller positiven und negativen Terme von links nach rechts bzw. (4) von rechts nach links und anschließende Subtraktion der Zwischenergebnisse.

Lösung

Problematisch ist hier die begrenzte Stellenzahl der Mantisse bei der Gleitpunktdarstellung. Rechnet man mit Gleitpunktzahlen mit 3 Nachkommastellen im Zehnersystem so folgt für die einzelnen Terme:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & -1/3 & 1/5 & -1/7 & 1/9 & -1/11 & 1/13 & -1/15 & 1/17 & -1/19 & 1/21 \\ 0,100 \cdot 10^1 & -0,333 & 0,200 & -0,142 & 0,111 & -0,909 \cdot 10^{-1} & 0,769 \cdot 10^{-1} & -0,666 \cdot 10^{-1} & 0,588 \cdot 10^{-1} & -0,526 \cdot 10^{-1} & 0,476 \cdot 10^{-1} \end{array}$$

Die folgenden Rechnungen erfolgen mit Gleitpunktzahlen, die auf drei Nachkommastellen begrenzt sind. Bei der Ausführung der Addition entstehen daher Abbrechfehler.

Addition und Subtraktion von links nach rechts:

$$0,100 \cdot 10^1 - 0,033 \cdot 10^1 = 0,067 \cdot 10^1 = 0,670$$

$$0,670 + 0,200 - 0,142 + 0,111 - 0,090 + 0,076 - 0,066 + 0,058 - 0,052 + 0,047 = 0,812.$$

Addition und Subtraktion von rechts nach links:

$$(0,476 - 0,526 + 0,588 - 0,66 + 0,796 - 0,909) \cdot 10^{-1} = -0,241 \cdot 10^{-1} \rightarrow -0,024$$

$$-0,024 + 0,111 - 0,142 + 0,200 - 0,333 = -0,188 \rightarrow -0,018 \cdot 10^1$$

$$-0,018 \cdot 10^1 + -0,100 \cdot 10^1 = 0,082 \cdot 10^1 = 0,820.$$

Getrennte Addition aller positiven und aller negativen Terme von links nach rechts und anschließende Subtraktion:

Positive Terme:

$$(0,100 + 0,020 + 0,011 + 0,007 + 0,005 + 0,004) \cdot 10^1 = 0,147 \cdot 10^1.$$

Negative Terme:

$$0,333 + 0,142 + 0,090 + 0,066 + 0,052 = 0,683.$$

Ergebnis:

$$0,147 \cdot 10^1 - 0,683 = 0,147 \cdot 10^1 - 0,068 \cdot 10^1 = 0,079 \cdot 10^1 = 0,790.$$

Getrennte Addition aller positiven und aller negativen Terme von rechts nach links und anschließende Subtraktion:

Positive Terme:

$$(0,476 + 0,588) \cdot 10^{-1} = 1,064 \cdot 10^{-1} = 0,106$$

$$0,106 + 0,076 + 0,111 + 0,200 = 0,493 \rightarrow 0,049 \cdot 10^1$$

$$0,049 \cdot 10^1 + 0,100 \cdot 10^1 = 0,149 \cdot 10^1.$$

Negative Terme:

$$(0,526 + 0,666) \cdot 10^{-1} = 1,192 \cdot 10^{-1} \rightarrow 0,119$$

$$0,119 + 0,090 + 0,142 + 0,333 = 0,684.$$

Ergebnis:

$$0,149 \cdot 10^1 - 0,684 = 0,149 \cdot 10^1 - 0,068 \cdot 10^1 = 0,081 \cdot 10^1 = 0,810.$$

Rechnet man auf 5 Stellen genau, so erhält man 0,80807. Vergleicht man dies mit den obigen Ergebnissen, so wird deutlich, dass Verfahren (4), also die getrennte Addition aller positiven und negativen Terme von rechts nach links und anschließende Subtraktion der Zwischenergebnisse das genaueste Ergebnis liefert.

A 1.27 (M2, P1) Zur näherungsweise Berechnung von Wurzeln $y = \sqrt{x}$ mit $x \geq 0$ ist die Newtonsche Iterationsformel $y_{k+1} = (y_k + \frac{x}{y_k})/2$ gut geeignet. Beginnend mit einem Startwert $y_0 \neq 0$ berechnet man Näherungswerte, bis der Fehler $\varepsilon = |y_{k+1} - y_k| < s$ mit gegebenem s wird.

- Entwickeln Sie eine einfache Strategie zur Ermittlung eines Startwertes y_0 , für den die zu erwartende Anzahl der Iterationen möglichst klein ist. Rechnen Sie dabei im Zehnersystem mit Gleitkommazahlen in Normalform, also $0, d_1 d_2 d_3 \dots \cdot 10^e$ mit $d_1 > 0$.
- Vergleichen Sie Ihre Strategie mit den Strategien $y_0 = 1$ und $y_0 = x$, indem Sie für einige repräsentative Beispiele die Anzahl der erforderlichen Iterationen zählen. Schreiben Sie dazu am besten ein Programm in einer beliebigen Programmiersprache Ihrer Wahl.

Lösung

- Ist x als Gleitpunktzahl im Zehnersystem gegeben, so ist $10^{e/2}$ eine gute Näherung für den Startwert, da dies ja die Wurzel aus 10^e ist, so dass sich die Newtonsche Iteration nur noch auf die Mantisse bezieht, die

immer zwischen 0 und 1 liegt. Am einfachsten lässt sich dies mithilfe eines Programms nachvollziehen. Im Beispiel wurde $x = 123456$ verwendet, der Exponent ist also $e = 6$, entsprechend dem Startwert $y_0 = 1000$. Dafür sind nur 6 Iterationen erforderlich. Für den Startwert 1 sind dagegen 13 Iterationen erforderlich.

Iteration	Näherungswert
1	561,728027
2	390,753479
3	353,348450
4	351,368652
5	351,363068
6	351,363068

- b) Der Vergleich der Anzahl der Iterationen für den Startwert $y_0 = 1$ mit Anzahl der Iterationen unter Verwendung des optimierten Startwert $y_0 = 10^{e/2}$ ist oben bereits erledigt. Der Startwert $y_0 = x$ ist mit dem Startwert $y_0 = 1$ identisch. Man erkennt dies unmittelbar durch Einsetzen in die Newtonsche Formel $y_1 = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{x}{y_0}) = \frac{y_0 + 1}{2}$.

A 1.28 (L1) Berechnen Sie $(a \wedge \neg b) \vee c$ für $a = 10111011$, $b = 01101010$, $c = 10101011$. Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass $(a \wedge \neg b) \vee c = (a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$ gilt.

Lösung

Berechnung von $(a \wedge \neg b) \vee c$:

a :	10111011
b :	01101010
$\neg b$:	10010101
$a \wedge \neg b$:	10010001
c :	10101011
$(a \wedge \neg b) \vee c$:	10111011

<p>Berechnung von $a \vee c$:</p> <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>a:</td> <td>10111011</td> </tr> <tr> <td>c:</td> <td>10101011</td> </tr> <tr> <td>$a \vee c$:</td> <td>10111011</td> </tr> </table>	a :	10111011	c :	10101011	$a \vee c$:	10111011	<p>Berechnung von $\neg b \vee c$:</p> <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>b:</td> <td>01101010</td> </tr> <tr> <td>$\neg b$:</td> <td>10010101</td> </tr> <tr> <td>c:</td> <td>10101011</td> </tr> <tr> <td>$\neg b \vee c$:</td> <td>10111111</td> </tr> </table>	b :	01101010	$\neg b$:	10010101	c :	10101011	$\neg b \vee c$:	10111111
a :	10111011														
c :	10101011														
$a \vee c$:	10111011														
b :	01101010														
$\neg b$:	10010101														
c :	10101011														
$\neg b \vee c$:	10111111														

Berechnung von $(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$:

$a \vee c$:	10111011
$\neg b \vee c$:	10111111
$(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$:	10111011

Der Vergleich der beiden Ergebnisse zeigt, dass tatsächlich $(a \wedge \neg b) \vee c = (a \vee c) \wedge (\neg b \vee c)$ gilt.

A 1.29 (L1) Bestimmen Sie für 10110_{bin} und 10011011_{bin} jeweils das Ergebnis einer logischen und einer arithmetischen Verschiebung zunächst um eine und dann um zwei Stellen nach rechts und nach links. Gehen Sie dabei von einem 8-Bit-Register mit Übertragsbit aus.

Lösung

Bei der arithmetischen Verschiebung nach rechts bleibt das MSB erhalten, damit sich im Falle arithmetischer Operationen das Vorzeichen nicht ändert. Bei der logischen Verschiebung spielt das MSB keine Sonderrolle. Die logische und arithmetische Verschiebung nach links unterscheiden sich nicht.

Ausgangssituation:

Register Übertrag
00010110 0

Register Übertrag
10011011 0

Logische und arithmetische Verschiebung um eine Stelle nach links:

Register Übertrag
00101100 0

Register Übertrag
00110110 1

Logische und arithmetische Verschiebung um zwei Stellen nach links:

Register Übertrag
01011000 0

Register Übertrag
01101100 0

Logische Verschiebung um eine Stelle nach rechts:

Register Übertrag
00001011 0

Register Übertrag
01001101 1

Logische Verschiebung um zwei Stellen nach rechts:

Register Übertrag
00000101 1

Register Übertrag
00100110 1

Arithmetische Verschiebung um eine Stelle nach rechts:

Register Übertrag
00001011 0

Register Übertrag
11001101 1

Arithmetische Verschiebung um zwei Stellen nach rechts:

Register Übertrag
00000101 1

Register Übertrag
11100110 1

2 Lösungen zu Kapitel 2 – Nachricht und Information

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.1

A 2.1 (T1) Welche Mengen sind Alphabete: die geraden Zahlen, die reellen Zahlen, die Menge der Verkehrszeichen, die Primzahlen, die Noten der musikalischen Notenschrift?

Lösung

Die geraden Zahlen bilden ein Alphabet, da es sich um eine abzählbare Menge mit Ordnungsrelation handelt. Die reellen Zahlen bilden kein Alphabet. Es existiert zwar eine Ordnungsrelation, doch ist die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar.

Die Verkehrszeichen bilden kein Alphabet. Es handelt sich zwar um eine abzählbare Menge, doch gibt es keine allgemeingültige Ordnungsrelation.

Die Primzahlen bilden ein Alphabet, da es sich um eine abzählbare Menge mit Ordnungsrelation handelt. Die Noten der musikalischen Notenschrift sind ein Grenzfall. Die Menge der musikalischen Noten ist abzählbar und mit der Tonhöhe ist auch eine Ordnungsrelation definiert, insofern kann man von einem Alphabet sprechen. Eine Komplikation wäre die Erweiterung um die Notenlängen, wobei aber die Länge der Noten ebenfalls als Ordnungsrelation verstanden werden kann. Nähme man noch weitere Symbole der Notenschrift hinzu (etwa Notenschlüssel, Taktangaben sowie Erhöhungs-, Erniedrigungs- und Auflösungszeichen), so gäbe es keine erkennbare Ordnungsrelation mehr, so dass man nicht mehr von einem Alphabet sprechen könnte.

A 2.2 (T1) Was ist der Unterschied zwischen Nachrichten- und Informationsverarbeitung?

Lösung

Bei Nachrichten handelt es sich um im mathematischen Sinne konkrete und eindeutig definierte Objekte. Damit ist auch deren Verarbeitung (insbesondere durch einen Computer) eindeutig beschreibbar. Informationen gehen durch Interpretationen, die nicht eindeutig sein müssen und subjektive Züge tragen können, aus Nachrichten hervor. Der Begriff „Informationsverarbeitung“ ist daher nicht klar definiert. Meist ist Nachrichtenverarbeitung gemeint, wenn man von Informationsverarbeitung spricht.

A 2.3 (T1) Lässt sich die Zahl π als Nachricht übermitteln?

Lösung

Die Zahl π ist eine reelle Zahl, und zwar eine transzendente Zahl mit unendlich vielen Stellen, deren Folge kein periodisches Muster bildet. Da von einer Nachricht gefordert werden muss, dass sie aus einer abzählbaren Folge von Einzelzeichen bestehen muss, kann π genau genommen nicht als Nachricht übermittelt werden. Man kann jedoch einen Näherungswert von π mit beliebig vielen Stellen übermitteln, oder auch eine Rechenvorschrift, die dem Empfänger prinzipiell die Berechnung beliebig vieler Stellen von erlaubt.

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.2

A 2.4 (T0) Beschreiben Sie kurz die wesentlichen Details des genetischen Codes.

Lösung

Das Alphabet des genetischen Codes lautet $\{A, C, G, T\}$, wobei die Zeichen für die Nukleotide Adenin, Cytosin, Guanin und Thymin stehen. In den DNS-Molekülen codieren jeweils drei aufeinander folgende Zeichen eine Nukleinsäure. Da es $4^3 = 64$ verschiedene Kombinationsmöglichkeiten gibt, aber nur 20 Nukleinsäuren zu codieren sind, stehen in der Regel mehrere, oft bis zu 6 verschiedene Codewörter für dieselbe Nukleinsäure. Vier spezielle Codewörter (ATG, TAA, TGA und TGG) steuern den Beginn und den Abbruch der Synthese von Proteinen aus den Nukleinsäuren. Aus den Nukleinsäuren ist der genetische Code aufgebaut.

A 2.5 (T1) Vergleichen Sie biologische Gehirne mit digitalen Computern hinsichtlich Verarbeitungsgeschwindigkeit, Parallelität, Fehlertoleranz und Speicherprinzip.

Lösung

Biologische Gehirne weisen im Vergleich mit digitalen Computern eine niedrige Verarbeitungsgeschwindigkeit der Einzelkomponenten (Neuronen), eine hohe Parallelität und eine hohe Fehlertoleranz auf, d. h. Erhaltung der Funktionalität auch bei Ausfall einzelner Komponenten. Die hohe Parallelität biologischer Gehirne gleicht dabei die niedrige Arbeitsgeschwindigkeit der Einzelkomponenten teilweise wieder aus. Biologische Gehirne verwenden das assoziative Speicherprinzip, bei dem Inhalte gestreut gespeichert und durch Vergleich mit Mustern wieder gefunden werden. In üblichen Digitalcomputern erfolgt die Speicherung durch eindeutige Adressierung von Speicherzellen. Aus den unterschiedlichen Operationsprinzipien ergibt sich, dass biologische Gehirne auf schnelle Mustererkennung und Computer auf Exaktheit und Geschwindigkeit bei numerischen Berechnungen optimiert sind.

A 2.6 (M1) Der einer Tonhöheempfindung R_1 entsprechende physikalische Reiz S_1 betrage 1% des Maximalreizes S_{\max} . Das Verhältnis von Maximalreiz zu Reizschwelle hat den Wert $S_{\max}/S_0 = 10^3$. Um welchen Faktor muss ein physikalischer Reiz S_2 größer sein als S_1 , damit sich die zugehörige Reizempfindung von R_1 auf R_2 verdoppelt?

Lösung

Nach dem Fechnerschen Gesetz gilt $R = c \cdot \log\left(\frac{S}{S_0}\right)$. Mit $S_{\max}/S_0 = 10^3$ rechnet man:

$$\begin{aligned}R_2 &= c \cdot \log\left(\frac{S_2}{S_0}\right) = 2R_1 = 2c \cdot \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = c \cdot \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + c \cdot \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \\&\Rightarrow c \cdot \log\left(\frac{S_2}{S_0}\right) = c \cdot \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + c \cdot \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \\&\Rightarrow \log\left(\frac{S_2}{S_0}\right) = \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \\&\Rightarrow \log\left(\frac{S_2}{S_0}\right) - \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \\&\Rightarrow \log\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_1}{S_0} = 0,01 \cdot 10^3 = 10\end{aligned}$$

Der physikalische Reiz S_1 muss also um den Faktor 10 auf den physikalischen Reiz S_2 erhöht werden, damit sich die Empfindung der Lautstärke verdoppelt.

A 2.7 (M2) Die zu einem empfundenen Helligkeitsreiz R gehörige Pulsfrequenz f ist proportional zu R , es gilt also $f \sim R$. Außerdem gilt nach dem Fechnerschen Gesetz $R \sim \log(S/S_0)$. Für das Helligkeitsempfinden

kennt man die zum physikalischen Maximalreiz S_{\max} gehörende maximale Pulsfrequenz $f_{\max} = 250\text{Hz}$ sowie das Verhältnis von Maximalreiz zu Reizschwelle $S_{\max}/S_0 = 10^{10}$ aus experimentellen Untersuchungen. Welche Pulsfrequenz gehört zu einem physikalischen Reiz $S_1 = S_{\max}/10$?

Lösung

Aus $f \sim R$ und $R \sim \log(S/S_0)$ folgt $f = c \log(S/S_0)$ mit einer Proportionalitätskonstanten c .

Aus $f_{\max} = c \log(S_{\max}/S_0)$ und $250 = c \cdot \log 10^{10}$ folgt $250 = c \cdot 10$, also $c = 25$.

Also: $f_1 = c \log(S_1/S_0) = 25 \cdot \log(S_{\max}/S_0/10) = 25(\log(S_{\max}/S_0) - \log 10) = 25 \cdot (10 - 1) = 225\text{Hz}$.

A 2.8 (M3) Nach dem Weberschen Gesetz gilt für eine von biologischen Rezeptoren gerade noch auflösbare Differenz ΔS eines physikalischen Reizes S die Beziehung $\Delta S = k \cdot S$. Berechnen Sie daraus mit gegebener Proportionalkonstante k und gegebenem S_{\max}/S_0 (Maximalreiz zu Reizschwelle) die Anzahl der aufgelösten Reizstufen für folgende Reize:

- a) Helligkeit: $S_{\max}/S_0 = 10^{10}$, $k = 0,02$
- b) Lautstärke: $S_{\max}/S_0 = 10^{12}$, $k = 0,09$
- c) Tonhöhe: $S_{\max}/S_0 = 10^3$, $k = 0,003$

Lösung

Aus $\Delta S = k \cdot S$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta S_1 = S_1 - S_0 = k \cdot S_0 &\Rightarrow S_1 = S_0(1+k) \\ \Delta S_2 = S_2 - S_1 = k \cdot S_1 &\Rightarrow S_2 = S_1(1+k) = S_0(1+k)^2 \\ &\vdots \\ S_n = S_0(1+k)^n \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{S_n}{S_0} = (1+k)^n \Rightarrow n = \frac{\log(S_n/S_0)}{\log(1+k)}$$

Einsetzen der gegebenen Zahlen liefert:

- | | | | |
|----------------|--------------------------|-------------|-----------------------------------|
| a) Helligkeit: | $S_{\max}/S_0 = 10^{10}$ | $k = 0,02$ | $n = \frac{10}{\log 1,02} = 1163$ |
| b) Lautstärke: | $S_{\max}/S_0 = 10^{12}$ | $k = 0,09$ | $n = \frac{12}{\log 1,09} = 320$ |
| c) Tonhöhe: | $S_{\max}/S_0 = 10^3$ | $k = 0,003$ | $n = \frac{3}{\log 1,003} = 2306$ |

A 2.9 (T1) Nennen Sie Parallelen zwischen biologischer und elektronischer Datenverarbeitung.

Lösung

Nachrichtenübertragung durch elektrische Signale; Verwendung der besonders störsicheren Pulscode-Modulation; Mustererkennung in Sprach- und Bildverarbeitung; Parallelverarbeitung biologischer Gehirne und technisch realisierter neuronaler Netze; assoziative Speicherung von Daten; Verwendung des digitalen genetischen Codes bzw. des digitalen Binär-Codes; Nachbildung der Evolution in genetischen Algorithmen.

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.3

A 2.10 (M1) Ein elektronisches Thermometer soll einen Temperaturbereich von -40°C bis $+50^{\circ}\text{C}$ erfassen und eine zur Temperatur proportionale Spannung zwischen 0 und 5 V ausgeben. Die Aufnahme dieser Temperaturdaten soll mithilfe einer in einen PC einzubauenden Digitalisierungskarte erfolgen. Zur Auswahl einer geeigneten Karte sind einige Fragen zu klären.

- Wie viele Bit sind mindestens für die Digitalisierung nötig, wenn die Auflösung ca. $0,1^{\circ}\text{C}$ betragen soll?
- Wie groß ist das durch das Quantisierungsrauschen bedingte Signal-Rausch-Verhältnis im mittleren Temperaturbereich?
- Die Elektronik des Temperatursensors überlagert dem Temperatursignal ein elektronisches weißes Rauschen von $3 \cdot 10^{-4}$ des maximalen Ausgangssignals. Vergleichen Sie dieses elektronische Rauschen mit dem Quantisierungsrauschen. Ist das Ergebnis mit dem in Teilaufgabe a) gefundenen Ergebnis zu vereinbaren?

Lösung

- Eine Auflösung von $0,1^{\circ}\text{C}$ bei einem Wertebereich von -40°C bis $+50^{\circ}\text{C}$ bedeutet, dass 900 Teilschritte erforderlich sind. Dabei entsprechen 0 V einer Temperatur von -40°C und 5 V einer Temperatur von $+50^{\circ}\text{C}$. Temperaturschritte von $0,1^{\circ}\text{C}$ entsprechen also einer Spannungsdifferenz von $5000/900 \approx 5,55 \text{ mV}$. Eine Digitalisierung mit 9 Bit ergäbe $2^9 = 512$ Teilschritte, eine Digitalisierung mit 10 Bit ergäbe $2^{10} = 1024$ Teilschritte. Man muss also eine Digitalisierung mit 10 Bit wählen. Ein Teilschritt entspricht dann $90^{\circ}\text{C}/1024 \approx 0,088^{\circ}\text{C}$ bzw. $5000 \text{ mV}/1024 \approx 4,88 \text{ mV}$.
- Das Quantisierungsrauschen beträgt $r \approx 4,88 \text{ mV}/2 \approx 2,44 \text{ mV}$. In der Mitte des Temperaturbereichs, also bei 5°C entsprechend 2500 mV, ist dann das Signal-Rausch-Verhältnis:
 $\text{SNR} \approx 20 \cdot \log(2500/2,44) \approx 60,2 \text{ dB}$.
- Das elektronische weiße Rauschen des analogen Temperatursignals beträgt nach Angabe $3 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ V} = 1,5 \text{ mV}$. Das in Teilaufgabe b) berechnete Quantisierungsrauschen ist mit 2,44 mV also deutlich höher als das elektronische Rauschen, so dass die Digitalisierung mit 10 Bit sinnvoll ist. Eine Digitalisierung mit 11 Bit, entsprechend 2048 Schritten, wäre vorzuziehen, da dann das Digitalisierungsrauschen mit 1,22 mV mit dem elektronischen Rauschen vergleichbar wäre. ADCs mit 11 Bit sind aber technisch unüblich. Eine Digitalisierung mit 12 Bit, entsprechend 2048 Schritten, wäre nicht mehr sinnvoll, da nun das elektronische Rauschen mit 1,5 mV erheblich höher wäre als das Quantisierungsrauschen mit 0,61 mV.

A 2.11 (M1) Ein Videosignal mit einer Grenzfrequenz von 7,5 MHz soll durch einen 10-Bit ADC digitalisiert werden. Welchen zeitlichen Abstand sollten die äquidistanten Abtastschritte mindestens einhalten? Geben Sie außerdem das SNR an.

Lösung

Die in dem Videosignal enthaltene Information wird exakt wiedergegeben, wenn die Abtastrate (Sampling Rate) gemäß der Nyquist-Bedingung mindestens doppelt so groß gewählt wird wie die Grenzfrequenz ν_G . Für den zeitlichen Abstand t_s der Abtastschritte folgt damit:

$$t_s \leq \frac{1}{2\nu_G} = \frac{10^{-6}}{2 \cdot 7,5} \approx 0,066 [\mu\text{s}]$$

Bei Verwendung eines 10-Bit ADC wird das Videosignal bezogen auf seinen Maximalpegel f_{\max} in $2^{10} = 1024$ äquidistante Schritte unterteilt. Ein Quantisierungsschritt beträgt damit $f_{\max}/1024$ und der dabei maximal

mögliche Fehler, das Quantisierungsrauschen, gerade die Hälfte dieses Werts, also $r = f_{max}/2048$. Oft wird als Maß für die Güte einer Quantisierung auch der relative Quantisierungsfehler, also der Quotient f_{ave}/r angegeben, wobei $f_{ave} \approx f_{max}/2$ der mittlere Pegel ist. Da r meist viel kleiner ist als f_{ave} , kann f_{ave}/r sehr groß werden. Aus diesem Grund, und weil dies auch dem physiologischen Empfinden besser entspricht, verwendet man den als Signal-Rausch-Abstand (Signal-to-Noise Ratio, SNR) bezeichneten mit 20 multiplizierten Logarithmus dieses Quotienten mit der Maßeinheit dB (Dezibel):

$$\text{SNR} = 20 \cdot \log(f_{ave}/r) \quad [\text{dB}] \quad \text{Hier: } \text{SNR} = 20 \cdot \log(2048/2) \approx 60,20 \quad [\text{dB}] \quad .$$

A 2.12 (T1) Grenzen Sie die folgenden Begriffe gegeneinander ab: Digitalisierung, Diskretisierung, Abtastung, Sampling und Quantisierung.

Lösung

Unter Digitalisierung oder Diskretisierung versteht man die Transformation von Nachrichten aus der für gewöhnlich kontinuierlichen Darstellung in eine diskrete, elektronische Darstellung mit endlich vielen Stufen, die für die Verarbeitung in Digitalrechnern erforderlich ist. Als Abtastung oder Sampling bezeichnet man die Abtastung der Werte einer Funktion an bestimmten vorgegebenen Stellen, also die Diskretisierung des Definitionsbereichs der Funktion. Der Übergang von einer kontinuierlichen zu einer digitalen Nachricht erfordert nach der Abtastung noch einen zweiten Diskretisierungsschritt, die Quantisierung. Dazu wird der Wertebereich der zu diskretisierenden Funktion in eine Menge von Zahlen abgebildet, die das Vielfache einer bestimmten Zahl sind, des sogenannten Quantenschritts.

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.4

A 2.13 (M1) Sie haben es in die Vorrunde des Millionenspiels geschafft. Die Einstiegsfrage lautet: Ordnen Sie die folgenden Mittelmeerinseln in der Reihenfolge von Ost nach West:

A: Kreta, B: Korsika, C: Sizilien, D: Zypern

Da Sie keine Ahnung haben, raten Sie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen Sie richtig?

Lösung

Nur eine der möglichen Anordnungen der 4 Elemente {A, B, C, D} ist richtig. Es handelt sich um Permutationen, also gibt es $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, das richtige Ergebnis zu raten beträgt also $1/24 \approx 0,042$ entsprechend ca. 4,2%. Dieses Ergebnis findet man auch durch systematisches Aufschreiben aller 24 Möglichkeiten:

ABCD ABDC ACBD ACDB ADBC ADCB

BACD BADC BCAD BCDA BDAC BDCA

CABD CADB CBAD CBDA CDAB CDBA

DABC DACB DBAD DBDA DCAB DCBA

Die korrekte Antwort lautet CBAD.

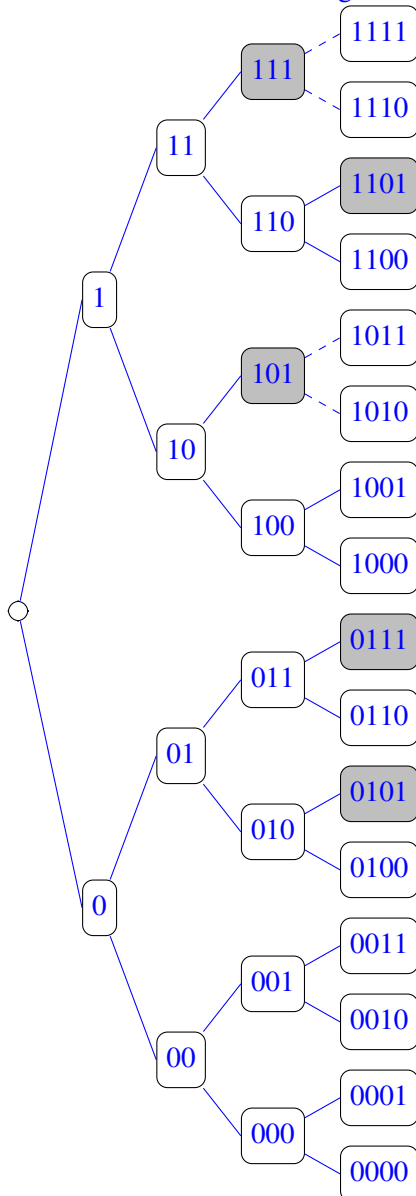
A 2.14 (L1) Mithilfe eines Zufallsgenerators werde eine Folge aus den Zeichen 0 und 1 erzeugt. Der Vorgang soll beendet werden, sobald entweder die Teilfolge 111 oder die Teilfolge 101 auftritt. Welcher Ausgang ist wahrscheinlicher?

Lösung

Es wird angenommen, dass der Zufallsgenerator die beiden Zeichen 0 und 1 mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit erzeugt. Wie die unten stehende Grafik zeigt, ist der Ausgang des Spieles mit der Folge 101

wahrscheinlicher, als mit der Folge 111. Wichtig ist allerdings, dass das Spiel nach Auftreten einer dieser Folgen beendet werden muss.

In einer unendlich langen Zufallsfolge aus 0en und 1en treten selbstverständlich alle Kombinationen aus drei Zeichen mit derselben Häufigkeit auf.



A 2.15 (M2) Wie wahrscheinlich ist es, im Lotto 6 aus 49, 5 bzw. 3 Richtige zu tippen?

Lösung

Beim Lottospiel werden 6 Elemente ohne Wiederholungen aus einer Menge von 49 Elementen ausgewählt, wobei die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt. Es handelt sich also um Kombinationen ohne Wiederholungen. Die Anzahl der Möglichkeiten ist demnach

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

Da genau 6 Zahlen gezogen werden, gibt es auch nur ein Mal 6 Richtige. Daher folgt nach der Abzählregel „Anzahl der günstigen / Anzahl der möglichen Fälle“ für die Wahrscheinlichkeit, 6 Richtige zu tippen:

$$p_6 = 1/13983816 \approx 7,151 \cdot 10^{-8}.$$

Etwas schwieriger ist es, allgemein die Wahrscheinlichkeit für das Tippen von $m < k$ richtigen Zahlen aus $k = 6$ Gewinnzahlen zu berechnen, die aus einer Menge von $n = 49$ Zahlen gezogen wurden. Dazu ist zunächst die Anzahl der günstigen Fälle zu berechnen. Diese ergibt sich durch die Anzahl der Möglichkeiten, die m Gewinnzahlen aus den 6 gezogenen Zahlen auszuwählen, multipliziert mit der Anzahl, wie die $k - m$ getippten Nicht-Gewinnzahlen auf die verbleibenden $n - k$ nicht gezogenen Zahlen verteilt werden können. Insgesamt ergibt sich dann für $m = 5$ und $m = 3$:

$$p_5 = \frac{\binom{k}{m} \binom{n-k}{k-m}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{6}{5} \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{15 \cdot 903}{13983816} \approx \frac{1}{1032} \approx 0,00097 \quad ,$$

$$p_3 = \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{20 \cdot 12341}{13983816} \approx \frac{1}{56,656} \approx 0,01765 \quad .$$

Diese auch für viele andere Anwendungen wichtige Funktion trägt den Namen *hypergeometrische Verteilung*.

A 2.16 (M2) Ein Geschäftsmann reist von Tokyo über Singapur und Bahrein nach München. In jedem der vier Flughäfen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein Koffer verloren geht p . Der Geschäftsmann wartet in München vergeblich auf seinen Koffer. Berechnen Sie für jeden der Flughäfen die Wahrscheinlichkeit, dass der Koffer gerade dort verloren ging.

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Koffer in Tokyo verloren gegangen ist, beträgt $p_T = p$.

Für Singapur: $p_S = (1 - p)p$

Für Bahrein: $p_B = (1 - p)(1 - p)p$

Für München: $p_M = (1 - p)(1 - p)(1 - p)p$

Dies ergibt sich durch Anwendung der Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse: Wenn der Koffer genau in München verloren geht, dann darf er nicht in Tokyo, nicht in Singapur und nicht in Bahrein verloren gegangen sein; sonst wäre er ja in München gar nicht erst angekommen und könnte dort auch nicht verloren gehen.

A 2.17 (L3) Die Journalistin Marilyn vos Savant hat folgendes Fernseh-Quiz in Amerika populär gemacht: Einem Kandidaten werden 3 Türen gezeigt und mitgeteilt, dass sich hinter zwei Türen je eine Ziege befindet und hinter einer Tür ein Auto. Errät der Kandidat die Tür, hinter der das Auto steht, so erhält er es als Gewinn. Der Kandidat zeigt nun ohne diese zu öffnen auf eine Tür. Der Spielleiter öffnet nun von den verbleibenden beiden Türen diejenige, hinter der sich eine Ziege befindet. Der Kandidat darf nun nochmals wählen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Kandidat mit den drei folgenden Strategien das Auto?

- Er bleibt bei der getroffenen Wahl.
- Er wählt nun die andere noch geschlossene Tür.
- Er wirft zur Wahl der beiden verfügbaren Türen eine Münze.

Lösung

- Bleibt der Kandidat bei seiner Wahl, so spielt die Tatsache, dass eine Tür geöffnet wurde, keine Rolle. Der Kandidat hätte ebenso gut nach seiner anfänglichen Wahl nach Hause gehen können, ohne abzuwarten, welche Tür der Spielleiter nun öffnet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, das Auto zu erhalten ist also nach der Abzählregel $= 1/3$.
- Hier hat der Kandidat die Möglichkeit, das zusätzliche Wissen nach Öffnen einer Tür mit einzubeziehen. Es ergeben sich folgende drei gleich wahrscheinliche Möglichkeiten:

TÜR 1	TÜR 2	TÜR 3
<i>Auto</i>	<i>Ziege</i>	<i>Ziege</i>
erste Wahl	neue Wahl	geöffnet
	geöffnet	neue Wahl
<i>Auto</i>	<i>Ziege</i>	<i>Ziege</i>
neue Wahl	erste Wahl	geöffnet
<i>Auto</i>	<i>Ziege</i>	<i>Ziege</i>
neue Wahl	geöffnet	erste Wahl

Ändert der Kandidat also seine Wahl (neue Wahl), trifft er einmal auf „Ziege“ und zweimal auf „Auto“. Die Wahrscheinlichkeit dafür, das Auto zu gewinnen, ist bei dieser Strategie also $p = 2/3$. Die Überlegungen aus Teilaufgabe a) werden bestätigt: Bleibt der Kandidat bei seiner Wahl (erste Wahl), so trifft er zweimal auf „Ziege“ und einmal auf „Auto“. Es folgt $p = 1/3$.

- c) Nach dem Öffnen einer Tür, die jetzt unbeachtet bleibt, entsteht durch das Würfeln ein neues Zufallsexperiment, bei dem nur noch zwischen zwei Türen gewählt wird. Da bekannt ist, dass hinter einer Türe das Auto und hinter der anderen Türe eine Ziege steht, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das Auto zu gewinnen $p = 1/2$.

Eine gängige Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs bezieht sich auf die objektive Prognose künftiger Ereignisse. Häufig, so auch hier, drückt man mit Wahrscheinlichkeiten aber auch einen subjektiven, mehr oder weniger lückenhaften Kenntnisstand aus. Eine Änderung des Kenntnisstandes bewirkt somit auch eine Änderung von Wahrscheinlichkeiten. Die häufig zu beobachtende Verwirrung im Zusammenhang mit dem Ziegenproblem beruht gerade auf der Verwechslung der objektiven und subjektiven Wahrscheinlichkeit.

A 2.18 (L3) Schafkopfen ist ein Spiel mit 32 Karten für 4 Mitspieler, die jeweils 8 Karten erhalten. Wahrscheinlichkeiten und Kombinatorik sind dabei von großer Bedeutung.

- a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, ein „Sie“ (d. h. alle 4 Unter und alle 4 Ober) auf die Hand zu bekommen?
- b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, einen „Wenz mit 4“ (d. h. alle 4 Unter und sonst beliebige Karten) auf die Hand zu bekommen?

Lösung

- a) Es gibt 32 Karten, davon erhält jeder der vier Mitspieler 8 Karten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der Spieler alle vier Ober und alle vier Unter erhält ist dann:

$$p = \underbrace{\left(\frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} \cdot \frac{5}{29}\right)}_{4 \text{ Ober}} \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{28} \cdot \frac{3}{27} \cdot \frac{2}{26} \cdot \frac{1}{25}\right)}_{4 \text{ Unter}} = 9,507 \cdot 10^{-8} \quad .$$

Andere Lösungsmöglichkeit: Die Anzahl der Möglichkeiten, 8 Elemente aus einer Anzahl von 32 ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen, berechnet man als Kombinationen $C(32, 8)$ ohne Wiederholungen. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgt dann:

$$p = \frac{1}{C(32, 8)} = \frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{8!(32-8)!}{32!} = 9,507 \cdot 10^{-8} \quad .$$

b) Es gibt $C(8, 4) = \binom{8}{4} = 70$ Möglichkeiten (Kombinationen ohne Wiederholungen), 4 Untere in 8 Karten anzuordnen. Für die Kombination UUUU???? Mit U = Unter und ? = Nicht-Unter folgt die Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{UUUU????}) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{28}{28} \cdot \frac{27}{27} \cdot \frac{26}{26} \cdot \frac{25}{25} = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29}$$

Für jede andere der 70 Möglichkeiten ergibt sich derselbe Wert. Man kann dies anhand eines Beispiels nachvollziehen:

$$P(?U??UU?U) = \frac{28}{32} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{27}{30} \cdot \frac{26}{29} \cdot \frac{3}{28} \cdot \frac{2}{27} \cdot \frac{25}{26} \cdot \frac{1}{25} = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29}$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist nun die Summe dieser 70 identischen Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(\text{Wenz mit 4}) = 70 \cdot \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{7}{29 \cdot 31 \cdot 4} = 2,947 \cdot 10^{-3}$$

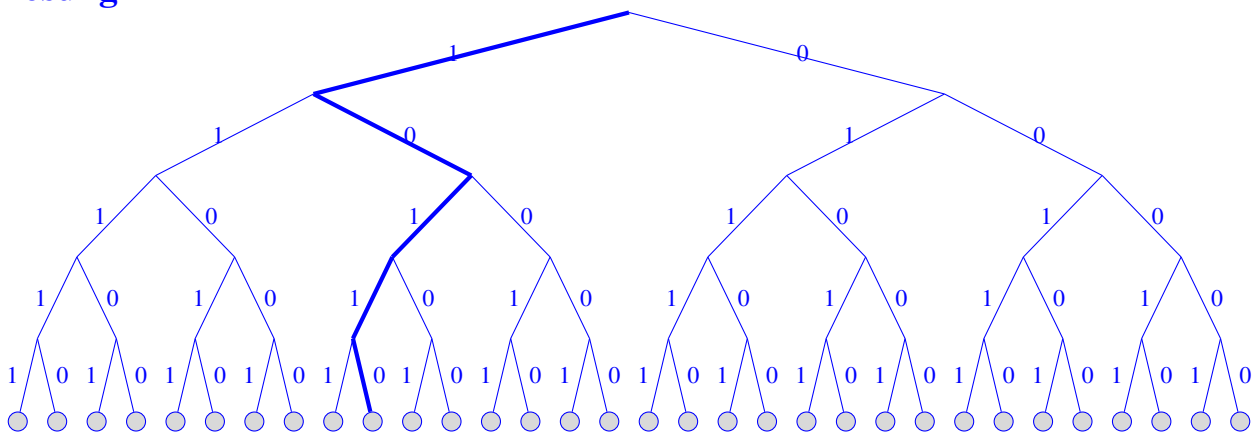
Andere Lösungsmöglichkeit: Die Anzahl der Möglichkeiten einen Wenz mit 4 zu erhalten ist gegeben durch die Anzahl der Möglichkeiten vier Untere zu ziehen, $C(4, 4)$, multipliziert mit der Anzahl der Möglichkeiten, die vier Nicht-Untere aus den verbleibenden 28 Karten zu kombinieren, $C(28, 4)$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgt dann:

$$p = \frac{\binom{4}{4} \binom{28}{4}}{\binom{32}{8}} = \frac{1 \cdot 8!(32-8)!28!}{32!4!(28-4)!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32} = \frac{7}{29 \cdot 31 \cdot 4} = 2,947 \cdot 10^{-3}$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.5

A 2.19 (L0) Wie viele Elementarentscheidungen sind zur Identifikation des Binärwortes 10110 erforderlich? Skizzieren Sie den zugehörigen Entscheidungsbaum (Codebaum) und markieren Sie den durch die getroffenen Elementarentscheidungen definierten Weg durch diesen Baum.

Lösung



A 2.20 (T0) Welcher Prozess bei der Nachrichtenverarbeitung ist prinzipiell immer mit einem Energieaufwand verbunden?

Lösung

Das Speichern und Löschen von Daten.

A 2.21 (T0) Was ist mit damit gemeint, wenn man sagt, das Auftreten von Buchstabenpaaren in deutschen Texten sei korreliert?

Lösung

Berechnet man die Auftrittswahrscheinlichkeiten von Zeichenpaaren durch Multiplikation der Auftrittswahrscheinlichkeiten der Einzelzeichen, so wird dabei angenommen, dass die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Zeichen unabhängig vom vorangehenden Zeichen ist. Dies ist jedoch in der Praxis nicht der Fall: Die Zeichen sind korreliert, d. h. es handelt sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten.

A 2.22 (M2) Gegeben sei die Menge $M = \{a, b, c, d\}$.

- Wie viele Teilmengen von M gibt es? Geben Sie diese explizit an.
- Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich die Menge M in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen zerlegen, so dass die Vereinigungsmenge dieser beiden Teilmengen wieder M ergibt? Teilmengen sind disjunkt, wenn ihr Durchschnitt leer ist.
- Auf wie viele verschiedene Arten lassen sich aus der Menge M zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen bilden, wenn die Vereinigung der beiden Teilmengen nicht unbedingt M ergeben muss.

Lösung

- a) Es gibt $N = 16$ Teilmengen, nämlich:

$\{\}$,
 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$,
 $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$,
 $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$,
 $\{a, b, c, d\}$

Die Elemente der Teilmengen ergeben sich durch Kombinationen ohne Wiederholungen von $m = 0, 1, 2, 3, 4$ aus $n = 4$ Elementen. Die Reihenfolge der Auswahl spielt keine Rolle. Man erhält daher:

$$N = \sum_{m=1}^n C(m,n) = \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 = 16 \quad .$$

Von diesen 16 Teilmengen sind 15 nicht leer.

- b) Folgende Zerlegungen von $M = \{a, b, c, d\}$ in zwei disjunkte Teilmengen, deren Vereinigung M ist, sind möglich:

$\{a, b, c\}, \{d\}$
 $\{a, b, d\}, \{c\}$
 $\{a, c, d\}, \{b\}$
 $\{b, c, d\}, \{a\}$

$\{a, b\}, \{c, d\}$
 $\{a, c\}, \{b, d\}$
 $\{a, d\}, \{b, c\}$

Es handelt sich wieder um Kombinationen ohne Wiederholungen von $m = 1$ und $m = 2$ Elementen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt:

$$C(1,4) = \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4 \quad \text{und} \quad C(2,4)/2 = \binom{4}{2}/2 = 3 \quad .$$

- c) Es gibt 25 derartige Zerlegungen. Zunächst gehören die 7 in b) gefundenen Mengen zu den gesuchten Zerlegungen. Außerdem gehören noch die $C(1,4)C(1,3)/2 = 6$ disjunkten Zerlegungen dazu, bei denen beide Teilmengen nur ein Element enthalten sowie die $C(1,4)C(2,3) = 12$ Zerlegungen, bei denen die eine Menge ein Element enthält und die andere Menge zwei Elemente.

A 2.23 (M1) Die folgende Aufgabe ist als das Botenproblem bekannt. Zum Übertragen einer Nachricht stehen zwei Kanäle A und B zur Verfügung, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers bei der Übertragung einer Nachricht für Kanal B doppelt so hoch ist wie für Kanal A. Mit welcher der beiden Strategien erreicht eine Nachricht den Empfänger mit größerer Sicherheit:

- Die Nachricht wird über Kanal A gesendet.
- Die Nachricht wird zweimal über Kanal B gesendet.

Lösung

Es sei p_{fA} die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Übertragung einer Nachricht über Kanal A ein Fehler auftritt und p_{fB} die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nachricht über Kanal B fehlerhaft übertragen wird. Nach Voraussetzung ist $p_{fB} = 2p_{fA}$.

Es gilt dann für die Wahrscheinlichkeiten p_A und p_B der korrekten Übertragung über Kanal A bzw. B:

$$p_A = 1 - p_{fA} \quad \text{und} \quad p_B = 1 - p_{fB} = 1 - 2p_{fA} \quad .$$

Die Wahrscheinlichkeit p_{BB} dafür, dass mindestens eine der zweimal über Kanal B gesendeten identischen Nachrichten ohne Störung den Empfänger erreicht ist:

$$\begin{aligned} p_{BB} &= P(\text{beide Nachrichten bleiben ungestört}) + \\ &\quad P(\text{nur Nachrichten 1 bleibt ungestört}) + \\ &\quad P(\text{nur Nachrichten 2 bleibt ungestört}) \\ &= p_B p_B + p_B(1 - p_B) + (1 - p_B)p_B = 2p_B - p_B^2 = p_A - p_B^2 < p_A \quad . \end{aligned}$$

Es ist also günstiger, die Nachricht nur einmal über Kanal A zu senden.

A 2.24 (L2) Gegeben seien ein Alphabet A sowie zwei Worte $s = s_1s_2s_3 \dots s_n$ und $t = t_1t_2t_3 \dots t_m$ mit $s_j, t_j \in A$ aus dem Nachrichtenraum A^* über diesem Alphabet. Geben Sie eine exakte Definition der lexikografischen Ordnung $s < t$.

Lösung

Für „s ist lexikografisch vor t“ wird hier $s < t$ geschrieben. Die Definition der lexikografischen Ordnung lässt sich dann beispielsweise in Form des folgenden Algorithmus angeben.

SETZE $k = \text{Minimum von } n \text{ und } m$

FÜR $i = 1$ bis k

 WENN $s_i < t_i$ DANN GIB AUS „s < t“; ENDE

 WENN $t_i < s_i$ DANN GIB AUS „t < s“; ENDE

WENN $n < m$ DANN $s < t$; ENDE

WENN $m < n$ DANN $t < s$; ENDE

GIB AUS „t und s sind identisch“; ENDE

A 2.25 (M1) Eine Person wählt in Gedanken zwei verschiedene natürliche Zahlen aus, die beide nicht kleiner als 1 und nicht größer als 100 sind. Wie viele Fragen muss man mindestens stellen, um die beiden Zahlen mit Sicherheit bestimmen zu können, wenn die befragte Person immer nur mit „ja“ oder „nein“ antwortet?

Lösung

Der Versuch kann $\binom{100}{2} = 2950$ verschiedene Ausgänge haben.

Es handelt sich dabei um Kombinationen ohne Wiederholungen. Da auf jede Frage mit ja oder nein geantwortet wird, lässt sich jede mögliche Kombination von Fragen und Antworten als Ast in einen Binärbaum interpretieren, der 4950 Endknoten (Blätter) hat. Die Tiefe t dieses Baumes, d. h. die Anzahl der Kanten der Äste von der Wurzel bis zu einem Blatt ist, da es sich um einen Binärbaum handelt, durch $t = \text{ld}(4950) \approx 12,27 \approx 13$ gegeben. Es werden also 13 (richtig gestellte!) Fragen immer zur Ermittlung beider Zahlen ausreichen. Im Einzelfall kann man natürlich Glück haben und mit weniger als 13 Fragen die beiden Zahlen erraten.

Dasselbe Resultat erhält man auch durch folgende Überlegung: Wenn alle Ausgänge gleich wahrscheinlich sind, wird die zugehörige Entropie $H = \text{ld}(4950) \approx 12,27$ sein. Auch daraus folgt, dass 13 Fragen genügen. Über eine Strategie zur Auswahl vernünftiger Fragen ist damit natürlich nichts gesagt.

A 2.26 (M1) Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, e, i, o, u\}$ mit den Auftretswahrscheinlichkeiten $P(a) = 0,25$, $P(e) = 0,20$, $P(i) = 0,10$, $P(o) = 0,30$, $P(u) = 0,15$. Berechnen Sie die Informationsgehalte der Zeichen von A und die Entropie von A .

Lösung

$$\text{Informationsgehalt: } I(x_i) = \text{ld} \frac{1}{P(x_i)}, \quad \text{Entropie: } H = \sum_{i=1}^n P(x_i) I(x_i) \quad .$$

Zeichen	$P(x_i)$	$I(x_i)$
a	0,25	2,0000
e	0,20	2,3219
i	0,10	3,3219
o	0,30	1,7370
u	0,15	2,7370

$$\begin{aligned} H &= 0,25 \cdot 2,0000 + 0,20 \cdot 2,3219 + 0,10 \cdot 3,3219 + 0,30 \cdot 1,7370 + 0,15 \cdot 2,7370 \\ &= 0,5 + 0,46438 + 0,33219 + 0,5211 + 0,41055 = 2,22822 \text{ [Bit/Zeichen]} \quad . \end{aligned}$$

A 2.27 (M2) Berechnen Sie den mittleren Informationsgehalt des Textes dieser Aufgabe. Am besten schreiben Sie dazu ein einfaches Programm in C oder Java.

Lösung

Zunächst ist zu abzuzählen, wie oft die einzelnen Zeichen x_i im Text der Aufgabe auftreten. So findet man beispielsweise die Häufigkeiten $h_a = 8$ für das Zeichen „a“ und $h_T = 1$ für das Zeichen „T“. Die Gesamtzahl der Zeichen ist $n = 141$. Daraus berechnet man nun gemäß $p_i = h_i/n$ die Auftretswahrscheinlichkeiten p_i als relative Häufigkeiten. Daraus folgt für die Informationsgehalte I_i der Zeichen.

Dies kann man etwas mühsam per Hand berechnen. Hier wurde ein C-Programm verwendet. Das Ergebnis $H \approx 4,243$ Bit/Zeichen mit den Zwischenergebnissen ist unten aufgelistet.

i	ASCII	x_i	h_i	p_i	I_i
1	32		20	0.1418	2.8176
2	46	.	2	0.0142	6.1396
3	65	A	2	0.0142	6.1396
4	66	B	1	0.0071	7.1396
5	67	C	1	0.0071	7.1396
6	73	I	1	0.0071	7.1396
7	74	J	1	0.0071	7.1396
8	80	P	1	0.0071	7.1396
9	83	S	2	0.0142	6.1396
10	84	T	1	0.0071	7.1396
11	97	a	8	0.0567	4.1396
12	98	b	3	0.0213	5.5546
13	99	c	3	0.0213	5.5546
14	100	d	5	0.0355	4.8176
15	101	e	23	0.1631	2.6160
16	102	f	3	0.0213	5.5546
17	103	g	3	0.0213	5.5546
18	104	h	4	0.0284	5.1396
19	105	i	9	0.0638	3.9696
20	108	l	2	0.0142	6.1396
21	109	m	5	0.0355	4.8176
22	110	n	11	0.0780	3.6801
23	111	o	4	0.0284	5.1396
24	114	r	8	0.0567	4.1396
25	115	s	7	0.0496	4.3322
26	116	t	6	0.0426	4.5546
27	117	u	2	0.0142	6.1396
28	118	v	1	0.0071	7.1396
29	120	x	1	0.0071	7.1396
30	122	z	1	0.0071	7.1396

A 2.28 (M2) Gegeben sei das Alphabet $A = \{a, b, c, d\}$.

- Wie viele verschiedene Worte der Länge 8 lassen sich mit diesem Alphabet bilden?
- Wie viele Worte enthält der eingeschränkte Nachrichtenraum A^8 , d. h. wie viele verschiedene Worte mit der Maximallänge 8 lassen sich mit diesem Alphabet bilden?
- Wie viele Worte können mit dem Alphabet A gebildet werden, wenn die Buchstaben innerhalb der Worte lexikografisch angeordnet sein sollen und wenn sich keine Buchstaben innerhalb eines Wortes wiederholen dürfen?

Lösung

- Es handelt sich um Variationen mit Wiederholungen aus einem Alphabet mit 4 Zeichen. Also gibt es $4^8 = 65536$ Worte der Länge 8.
- Dazu muss man die Anzahlen aller Worte mit den Längen 1 bis 8 addieren:
 $4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 + 4^7 + 4^8 = 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 4096 + 16384 + 65536 = 87380$.

- c) Es handelt sich um die Summe der Kombinationen von Worten der Länge 1, 2, 3, und 4 ohne Wiederholungen.

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4 \quad \{a, b, c, d\}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \quad \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \quad \{abc, abd, acd, bcd\}$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1 \quad \{abcd\}$$

3 Lösungen zu Kapitel 3 – Codierung

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.1

A 3.1 (T0) Was ist der Unterschied zwischen einer Codierung und einer Chiffrierung?

Lösung

Es seien A^* und B^* Nachrichtenräume über Alphabeten $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ bzw. $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Eine umkehrbar eindeutige Abbildung von A^* in B^* heißt Codierung. Eine Chiffrierung ist ebenfalls eine Codierung, jedoch mit der Einschränkung, dass die Quellmenge und die Zielmenge nur Einzelzeichen umfassen. So ist beispielsweise die Darstellung der Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen als binärer ASCII-Code keine Chiffrierung. Die Umschrift der kyrillischen Buchstaben in lateinische ist dagegen eine Chiffrierung.

A 3.2 (L1) Geben Sie für die folgenden Manipulationen auf ASCII-Zeichen einfache logische Operationen mit Bit-Masken an:

- Extraktion des Zahlenwertes aus den ASCII-Codes für die Ziffern 0 bis 9.
- Umwandlung von Kleinbuchstaben in Großbuchstaben und umgekehrt.

Lösung

- a) Die ASCII-Codes der Ziffern 0 bis 9 lauten: $011\ 0000 = „0“$ bis $011\ 1001 = „9“$.

Ist bekannt, dass der umzuwandelnde Code c einer Ziffer entspricht, so kann man aus c den entsprechenden Zahlenwert z sehr einfach durch folgende UND-Verknüpfung extrahieren:

$$\begin{aligned} z &= c \wedge 000111 && \text{für 7-Bit ASCII-Codes} \\ z &= c \wedge 0000111 = c \wedge 0F_{16} && \text{für 8-Bit ASCII-Codes} \end{aligned}$$

Soll zusätzlich sichergestellt werden, dass das Codewort c tatsächlich eine Ziffer ist, so wäre zu prüfen, ob $0110000 < c < 0111001$ gilt.

Man könnte zur Umwandlung von c in den binären Zahlenwert auch $0110000_2 = 48_{10}$ von c subtrahieren oder die logische Verknüpfung $c \text{ XOR } 00110000$ bilden. Dies dauert jedoch länger als die logische UND-Verknüpfung.

- b) Kleinbuchstaben: $a = 1100001$ bis $z = 1111010$
danach Umlaute und schließlich $\beta = 1111110$
Großbuchstaben: $A = 1000001$ bis $Z = 1011010$
danach Umlaute und schließlich $\sim = 1011110$

Offenbar unterscheiden sich die Codes nur in einem Bit. Die Umwandlung von Kleinbuchstaben in Großbuchstaben erfolgt daher durch AND-Verknüpfung mit der Maske $101\ 1111 = 5F_{16}$ (7-Bit-ASCII) bzw. mit der Maske $1101\ 1111 = DF_{16}$ (8-Bit-ASCII). Die Umwandlung von Großbuchstaben in Kleinbuchstaben erfolgt durch die OR-Verknüpfung mit der Maske $010\ 0000 = 20_{16}$ (7-Bit-ASCII). Bei 8-Bit ASCII-Code lautet die Maske $0010\ 0000 = 20_{16}$.

A 3.3 (T0) Was ist ein Blockcode, was ist der BCD-Code? Was sind Pseudo-Tetraden?

Lösung

Ein Block-Code ist ein Code mit konstanter Wortlänge, d. h. alle Codewörter haben identische Wortlängen. Diese stimmt dann offenbar mit der mittleren Wortlänge überein.

Für die Codierung von Zahlen verwendet man vor allem für finanzmathematische Anwendungen den BCD-Code (von Binary Coded Decimal). Dies erlaubt das Rechnen mit Geldbeträgen im Dezimalsystem, damit auch bei sehr großen Summen stellige Ergebnisse garantiert werden können.

Beim BCD und damit verwandten Codes zur Codierung von Ziffern werden für jede Ziffer vier binäre Stellen verwendet. Nach diesem Schema konstruierte Codes werden als Tetraden-Codes bezeichnet (von griechisch tetra = vier). Da es 16 verschiedene Codewörter mit Wortlänge 4 gibt, aber für die Codierung der Ziffern von 0 bis 9 nur 10 Wörter benötigt werden, existieren offenbar 6 Vier-Bit-Wörter, denen keine Ziffer entspricht. Man bezeichnet diese redundanten Wörter als Pseudo-Tetraden.

A 3.4 (L1) Ein Code ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von einem Nachrichtenraum A^* in einen Nachrichtenraum B^* . Welche Aussagen sind richtig:

- a) Es kann Elemente aus A^* geben, die kein Bild in B^* haben.
- b) Es kann Elemente in B^* geben, die kein Urbild in A^* haben.
- c) Es ist zulässig, dass ein Element aus A^* auf zwei verschiedene Elemente aus B^* abgebildet wird.
- d) Es ist ausgeschlossen, dass zwei verschiedene Elemente aus A^* auf dasselbe Element aus B^* abgebildet werden.

Lösung

- a) ist falsch, da ein Code jedes Element aus A^* erfassen muss.
- b) ist richtig, da die Abbildung von A^* in B^* und nicht auf B^* definiert ist.
- c) ist falsch, da die Abbildung umkehrbar eindeutig (eineindeutig) sein muss.
- d) ist richtig, da die Abbildung umkehrbar eindeutig (eineindeutig) sein muss.

A 3.5 (M2) Das Alphabet $A = \{a, e, i, o, u\}$ mit den Auftretswahrscheinlichkeiten $P(a) = 0,25$, $P(e) = 0,20$, $P(i) = 0,10$, $P(o) = 0,30$ und $P(u) = 0,15$ sei mit $B = \{11, 10, 010, 00, 011\}$ binär codiert. Berechnen Sie die mittlere Wortlänge und die Redundanz dieses Codes.

Lösung

Mittlere Wortlänge:

$$L = \sum_{i=1}^n p_i l_i \quad ,$$

Redundanz:

$$R = L - H \quad .$$

Hier ist H die Entropie. Es ergibt sich:

x_i	$P(x_i)$	$I(x_i)$	l_i
a	0,25	2,0000	2
e	0,20	2,3219	2
i	0,10	3,3219	3
o	0,30	1,7370	2
u	0,15	2,7370	3

Entropie: $H = 2,2282$ Bit/Zeichen.
 Mittlere Wortlänge: $L = 2,25$ Bit/Zeichen.
 Redundanz: $R = 2,25 - 2,2282 = 0,0218$ Bit/Zeichen.

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.2

A 3.6 (M3) Gegeben sei das unten tabellierte Alphabet $\{x_i\}$ mit den zugehörigen Auftretswahrscheinlichkeiten $\{p_i\}$:

x_i	A	E	I	O	U	Y
p_i	0,105	0,22	0,105	0,04	0,45	0,08

- Berechnen Sie die Informationsgehalte $I(x_i)$ sowie die Entropie.
- Bilden Sie einen Binärcode durch Aufstellen eines einfachen Codebaums, wobei für die Wortlängen der Codewörter die ganzzahlig aufgerundeten zugehörigen Informationsgehalte der zugehörigen Zeichen x_i gewählt werden sollen.
- Bilden Sie den optimalen Binärcode mithilfe des Huffman-Algorithmus.
- Bilden Sie einen Binärcode unter Verwendung des Fano-Algorithmus.
- Berechnen Sie für die in b), c) und d) gebildeten Codes die mittleren Wortlängen und die Redundanzen.

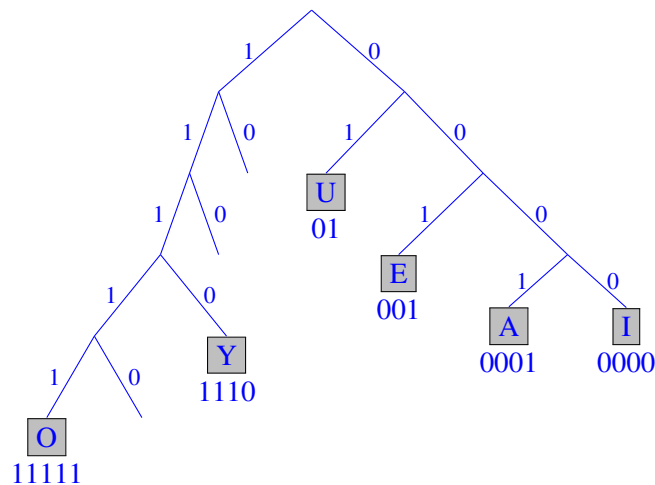
Lösung

a) Tabelle mit Informationsgehalt:

x_i	p_i	$I(x_i)$
A	0,105	3,2515
E	0,22	2,1844
I	0,105	3,2515
O	0,04	4,6439
U	0,45	1,1520
Y	0,08	3,6439

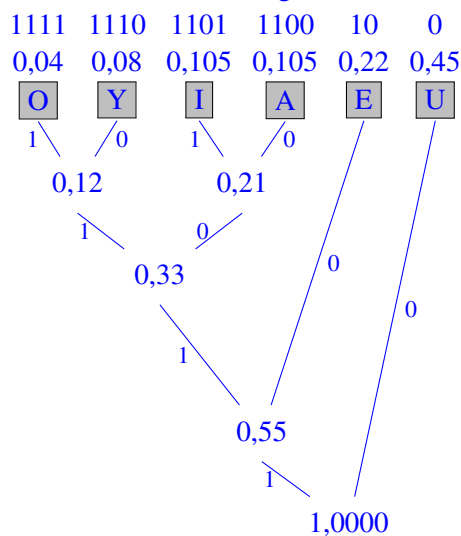
Entropie: $H = 2,1590$ Bit/Zeichen.

b) Beispiel für einen einfachen Code:



x_i	p_i	$I(x_i)$	l_i	einfacher Code
A	0,105	3,2515	4	0001
E	0,22	2,1844	3	001
I	0,105	3,2515	4	0000
O	0,04	4,6439	5	11111
U	0,45	1,1520	2	01
Y	0,08	3,6439	4	1110

c) Der Huffman-Code entsteht durch Konstruktion des folgenden Baums:



d) Der Fano-Algorithmus liefert den folgenden Code:

x_i	p_i	$\sum p_i$	Code
U	0,45	1,00	1
E	0,22	0,55	011
A	0,105	0,33	010
I	0,105	0,225	001
Y	0,08	0,12	0001
O	0,04	0,04	0000

e) einfacher Code:

Mittlere Wortlänge: $L = 2,92$ Bit/Zeichen.

Redundanz: $R = 2,92 - 2,1590 = 0,761$ Bit/Zeichen.

Huffman:

Mittlere Wortlänge: $L = 2,21$ Bit/Zeichen.

Redundanz: $R = 2,21 - 2,1590 = 0,051$ Bit/Zeichen.

Fano:

Mittlere Wortlänge: $L = 2,22$ Bit/Zeichen.

Redundanz: $R = 2,22 - 2,1590 = 0,061$ Bit/Zeichen.

A 3.7 (L2) Gegeben sei das binäre Alphabet $B = \{0, 1\}$. Geben Sie alle Teilmengen des Nachrichtenraums über B^* an, welche folgende Bedingungen erfüllen: Die Teilmengen umfassen mindestens drei Wörter; die Wörter bestehen aus höchstens zwei Zeichen; die Wörter erfüllen die Fano-Bedingung.

Lösung

Die gesuchten Teilmengen lauten:

$\{00, 01, 10, 11\}$,

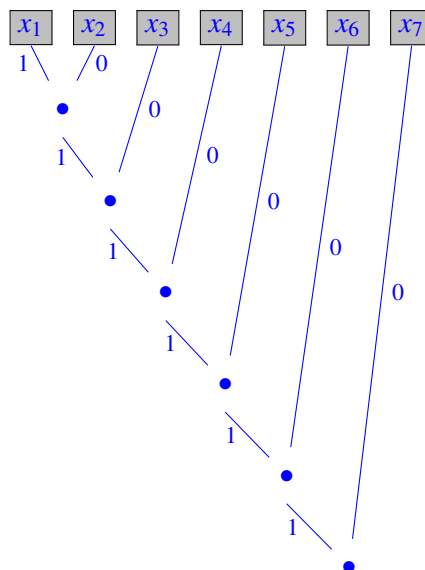
$\{00, 01, 10\}$, $\{00, 01, 11\}$, $\{00, 10, 11\}$, $\{01, 10, 11\}$,

$\{0, 10, 11\}$, $\{1, 00, 01\}$

A 3.8 (L3) Gegeben sei ein Alphabet mit n Zeichen. Bestimmen Sie die Wortlänge des Zeichens mit dem längsten Codewort, das eine binäre Huffman-Codierung im Extremfall liefern kann. Welche Bedingung muss dann für die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_i gelten?

Lösung

Das Codewort des längsten Wortes hat die Länge $n - 1$, mindestens jedoch 1. Dies folgt aus dem sich im Extremfall ergebenden entarteten Huffman-Baum, der nachfolgend für den Fall $n = 7$ angegeben ist. Das längste Codewort 111111 für das Zeichen x_1 hat also die Länge 6.



Dieser Extremfall ergibt sich, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Höchstens eine der verbleibenden Auftrittswahrscheinlichkeiten von Einzelzeichen ist kleiner als die durch Zusammenfassung der beiden Knoten mit den beiden kleinsten Auftrittswahrscheinlichkeiten gebildete Summe. Ordnet man die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_i mit $i = 1$ bis n aufsteigend der Größe nach, so muss also gelten:

$$\sum_{j=1}^k p_j \leq p_{k+1} \quad \text{für alle } k \text{ von } 1 \text{ bis } n-1.$$

A 3.9 (M3) Gegeben sei das Alphabet $\{A, B\}$ mit den Auftretswahrscheinlichkeiten $p_A = 0,7$ und $p_B = 0,3$. Geben Sie die Huffman-Codes für die Codierung von Einzelzeichen, von Gruppen aus zwei Zeichen, von Gruppen aus drei Zeichen und von Gruppen aus vier Zeichen an. Berechnen Sie dazu jeweils die mittleren Wortlängen und die Redundanzen in Bit/Zeichen.

Lösung

Entropie: $H = 0,8813$ Bit/Zeichen.

Codierung von Einzelzeichen: $A \leftrightarrow 0, B \leftrightarrow 1$

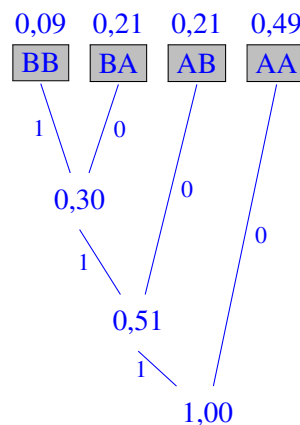
Mittlere Wortlänge: $L = 1$ Bit/Zeichen.

Redundanz: $R = 1 - 0,8813 = 0,1187$ Bit/Zeichen.

Codierung von Zweiergruppen:

x_i	p_i	Code
AA	0,49	0
AB	0,21	10
BA	0,21	110
BB	0,09	111

Huffman-Baum:



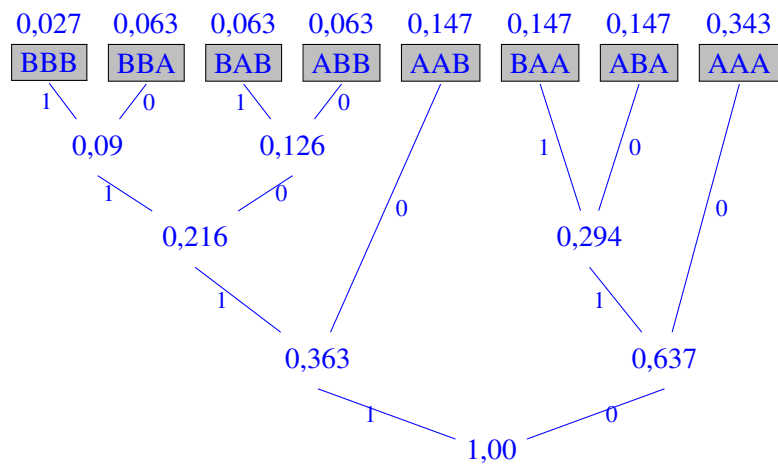
Mittlere Wortlänge: $L = 1,81$ Bit/2 Zeichen = $0,905$ Bit/Zeichen.

Redundanz: $R = 0,905 - 0,8813 = 0,0237$ Bit/Zeichen.

Codierung von Dreiergruppen:

x_i	p_i	Code
AAA	0,343	00
AAB	0,147	10
ABA	0,147	010
BAA	0,147	011
ABB	0,063	1100
BAB	0,063	1101
BBA	0,063	1110
BBB	0,027	1111

Huffman-Baum:



Mittlere Wortlänge: $L = 2,7260 \text{ Bit}/3 \text{ Zeichen} = 0,9087 \text{ Bit}/\text{Zeichen}$.

Redundanz: $R = 0,9087 - 0,8813 = 0,0274 \text{ Bit}/\text{Zeichen}$.

Offenbar ist das Ergebnis etwas schlechter als bei der Codierung von Zweiergruppen!

Codierung von Vierergruppen:

x_i	p_i	Code
AAAA	0,2401	10
AAAB	0,1029	000
AABA	0,1029	001
ABAA	0,1029	010
BAAA	0,1029	011
AABB	0,0441	11100
ABAB	0,0441	11101
BAAB	0,0441	11000
ABBA	0,0441	11001
BABA	0,0441	11110
BBAA	0,0441	11010
ABBB	0,0189	110110
BABB	0,0189	110111
BBAB	0,0189	111110
BBBA	0,0189	1111110
BBBB	0,0081	1111111

Mittlere Wortlänge: $L = 3,5672 \text{ Bit}/4 \text{ Zeichen} = 0,8918 \text{ Bit}/\text{Zeichen}$.

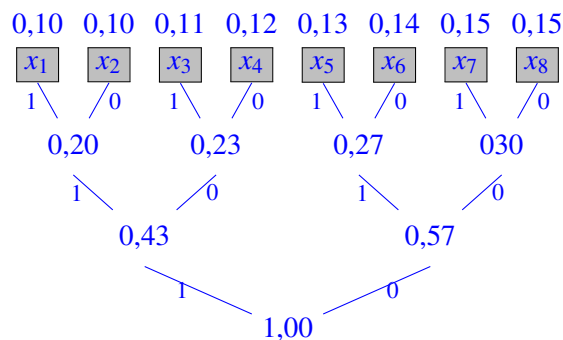
Redundanz: $R = 0,8918 - 0,8813 = 0,0105 \text{ Bit}/\text{Zeichen}$.

Gegenüber der Codierung mit Einzelzeichen hat sich die Redundanz um den Faktor 10 verringert. Gruppen-Codierung ist tatsächlich eine Möglichkeit, die Redundanz bis nahe 0 zu reduzieren. Allerdings sind hierbei die Korrelationen zwischen den Zeichen einer Gruppe nicht berücksichtigt. Die Berücksichtigung der Korrelationen (etwa durch die LZW-Codierung) erlaubt eine weitere wesentliche Redundanzreduktion.

A 3.10 (M2) Welche Bedingungen sind dafür hinreichend und notwendig, dass der Huffman-Algorithmus einen Blockcode liefert?

Lösung

Unter einem Block-Code versteht man einen Code mit konstanter Wortlänge, d. h. alle Codewörter haben dieselbe Länge. Damit dies erreicht wird, muss der Huffman-Baum ausgeglichen sein, dafür ist erforderlich, dass die Anzahl der Zeichen eine Potenz von 2 ist. Für jeden Knoten auf einem bestimmten Niveau des Huffman-Baums muss außerdem gelten, dass die ihm zugeordnete Wahrscheinlichkeit größer ist, als jede Wahrscheinlichkeit in dem vorhergehenden Niveau. Dies ist zum Beispiel jedenfalls dann der Fall, wenn alle Auftretswahrscheinlichkeiten gleich sind. Die Bedingung kann aber weiter gefasst werden: es müssen auf jedem Niveau, die den Knoten zugeordneten Wahrscheinlichkeiten größer sein, als die Wahrscheinlichkeiten aller vorangehenden Knoten. Das folgende Beispiel demonstriert dies:



A 3.11 (L1) Genügt die Deutsche Sprache der Fano-Bedingung?

Lösung

Nein: Es gibt Wörter, die Präfix eines anderen Wortes sind (und zwar sehr viele).

Beispiel: *Hund* und *Hundehütte*.

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.3

A 3.12 (T0) Wie berechnet man Stellendistanzen? Was ist der Unterschied zwischen Stellendistanz und Hamming-Distanz?

Lösung

Stellendistanz: Anzahl der Stellen, in denen sich zwei gleich lange Code-Wörter unterscheiden.

Hamming-Distanz: Die minimale in einem Block-Code auftretende Stellendistanz.

A 3.13 (L1) Bestimmen Sie die Stellendistanzen und die Hamming-Distanzen für die folgenden Codes:

a) {110101, 101011, 010011, 101100} b) {2B, 4A, 78, A9}.

Lösung

a)	110101	101011	010011	101100
110101	-	-	-	-
101011	4	-	-	-
010011	3	3	-	-
101100	3	3	6	-

Hamming-Distanz: $h = 3$.

b)	2B	4A	78	A9
	00101011	01001010	01111000	10101001
00101011	-	-	-	-
01001010	3	-	-	-
01111000	4	3	-	-
10101001	2	5	4	-

Hamming-Distanz: $h = 2$.

A 3.14 (L2) Bestimmen Sie die Hamming-Distanz für den Code {1101011, 1010110, 0000011, 0001100} und modifizieren Sie diesen Code dann durch Änderung eines einzigen Bit so, dass sich eine um eins erhöhte Hamming-Distanz ergibt.

Lösung

	1101011	1010110	0000011	0001100
1101011	-	-	-	-
1010110	5	-	-	-
0000011	3	4	-	-
0001100	5	4	4	-

Die Hamming-Distanz ist also $h = 3$.

Modifikation:

Lösung

	1101111	1010110	0000011	0001100
1101111	-	-	-	-
1010110	4	-	-	-
0000011	4	4	-	-
0001100	4	4	4	-

Weitere Lösungen:

1101011 \rightarrow 1111011, 1101011 \rightarrow 1101001, 1101011 \rightarrow 1101010.

A 3.15 (L2) Bei einer seriellen Datenübermittlung werden mit 7 Bit codierte ASCII-Zeichen mit einem zusätzlichen Paritätsbit und einem Längsprüfwort nach jeweils 8 Zeichen gesendet. Es gilt gerade Parität. Im Sender wird folgende Nachricht empfangen:

MSB	1 0 1 1 1 1 1 1	0	
	0 1 1 1 1 1 1 1	1	
	0 1 0 0 0 0 1 0	0	
Datenbits	0 0 0 1 0 1 0 0	0	Prüfspalte
	1 0 1 0 0 0 1 0	1	
	1 1 0 0 1 0 0 1	0	
LSB	0 0 1 1 0 1 1 0	0	
Paritätsbits	1 0 0 0 1 0 0 0	0	

Wie lautet die empfangene Nachricht? Sind Übertragungsfehler aufgetreten? Wenn ja, wie lautet die korrekte Nachricht? Bestimmen Sie die durch die Paritätsbits bedingte zusätzliche Redundanz.

Lösung

Die empfangene Nachricht lautet: F2eibier.

Es ist offenbar ein Fehler an der markierten Stelle aufgetreten. Durch Invertieren des entsprechenden Bits erhält man die korrekte Nachricht: Freibier.

MSB	1 <u>0</u> 1 1 1 1 1 1	0	⇐
	0 1 1 1 1 1 1 1	1	
	0 1 0 0 0 0 1 0	0	
Datenbits	0 0 0 1 0 1 0 0	0	Prüfspalte
	1 0 1 0 0 0 1 0	1	
	1 1 0 0 1 0 0 1	0	
LSB	0 0 1 1 0 1 1 0	0	
Paritätsbits	1 0 0 0 1 0 0 0	0	
	↑		

Zusätzliche Redundanz:

$$R = \frac{k+s+1}{k} = \frac{8+7+1}{8} = 2 \text{ [Bit/Wort].}$$

A 3.16 (T0) Was ist ein Gray-Code? Geben Sie einen Gray-Code für die direkt binär codierten Zahlen von 0 bis 16 an.

Lösung

in Gray-Code ist ein Ziffern-Code, bei dem benachbarte Codewörter auch benachbarte Ziffern codieren. Im Idealfall führt ein Ein-Bit-Fehler daher entweder zu einem Fehlerwort oder zu einem benachbarten Codewort, das dann einer zu der ursprünglich codierten Ziffer benachbarten Ziffer entspricht. Der dadurch bedingte Fehler ist in diesem Sinne minimal.

Gray-Code für die Zahlen von 0 bis 16:

Dezimal	Gray
0	00000
1	00001
2	00011
3	00010
4	00110
5	00111
6	00101
7	00100
8	01100
9	01101
10	01111
11	01110
12	01010
13	01011
14	01001
15	01000
16	11000

A 3.17 (L3) Finden Sie einen Binärkode mit Wortlänge 4 für die Ziffern 0 bis 9, wobei folgende Bedingung einzuhalten ist: Wenn bei der Übertragung für eine Ziffer x ein 1-Bit Fehler auftritt, so soll entweder ein Fehlerwort entstehen oder für die zu dem wegen des Fehlers entstehenden Codewort gehörende Ziffer y soll gelten: $|x - y| \leq 2$. Kann man unter Einhaltung dieser Bedingung noch mehr Ziffern codieren?

Lösung

Die Ziffern 0 bis 9 werden in das folgende Diagramm eingetragen. Das Zeichen „-“ markiert ein nicht verwendetes Codewort, also ein Fehlerwort. Z. B. erhält die Ziffer 4 das Codewort 0111.

	00	01	11	10
00	0	1	2	-
01	-	3	4	5
11	8	-	6	7
10	-	-	-	9

Durch einige Umstellungen gelingt es, auf diese Weise auch die Ziffern 0 bis 10 zu codieren:

	00	01	11	10
00	0	2	3	-
01	-	4	5	6
11	9	-	7	8
10	-	1	-	10

A 3.18 (M2) Wie viele verschiedene Codewörter kann ein 2-aus-6-Code und wie viele ein 1-aus-15-Code maximal enthalten? Geben Sie für die beiden Codes die Hamming-Distanz und die Redundanzen an. Dabei kann für alle Codewörter dieselbe Auftretswahrscheinlichkeit angenommen werden.

Lösung

Die Anzahl n der Codewörter ergibt sich als Anzahl der möglichen Kombinationen mit erlaubten Wiederholungen:

$$n = \binom{6}{2} = 15 \quad \text{für den 2-aus-6-Code,}$$

$$n = \binom{15}{1} = 15 \quad \text{für den 1-aus-15-Code.}$$

Die minimale Stellendistanz und damit auch die Hamming-Distanz ist in beiden Fällen (wie bei allen m -aus- n -Codes) $h = 2$. Man erkennt dies auch daran, dass man von einem Codewort zu einem unmittelbar benachbarten Codewort kommt, wenn man eine 1 in eine 0 ändert und an einer anderen Stelle eine 0 in eine 1, entsprechend also einer Stellendistanz von 2.

Der 2-aus-6-Code hat die konstante Wortlänge $L = 6$. Da alle Codewörter dieselbe Auftretswahrscheinlichkeit p besitzen sollen, ist diese $p = 1/15$. Für die Entropie erhält man daraus:

$$H = \sum_{i=1}^{10} p \log \frac{1}{p} = 15 \cdot \frac{1}{15} \log 15 = \log 15 \approx 3,9069 \quad .$$

Die Redundanz ist also: $R = L - H = 6 - 3,9069 = 2,0931$ Bit/Zeichen.

Für den 1-aus-15-Code ist $L = 15$ und die Entropie ebenfalls $H = \log 15 \approx 3,9069$ Bit/Zeichen, da 15 Zeichen mit identischen Auftretswahrscheinlichkeiten codiert werden sollen.

Somit ist die Redundanz: $R = L - H = 15 - 3,9069 = 11,0931$ Bit/Zeichen.

A 3.19 (M1) Zeigen Sie, dass 40182735 ein korrekt gebildeter 8-stelliger EAN-Code ist.

Lösung

Der 8-stellige EAN-Code hat die Form $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7p$, wobei die Prüfziffer p so gebildet wird, dass die Summe $3 \cdot a_1 + a_2 + 3 \cdot a_3 + a_4 + 3 \cdot a_5 + a_6 + 3 \cdot a_7$ durch Addition der Prüfziffer p auf eine durch 10 teilbare Zahl ergänzt wird. Hier erhält man die Summe $3 \cdot 4 + 0 + 3 \cdot 1 + 8 + 3 \cdot 2 + 7 + 3 \cdot 3 = 45$. Addition der Prüfziffer 5 ergibt 50, also tatsächlich eine durch 10 teilbare Zahl. Die Zahl 40182735 ist daher ein korrekt gebildeter EAN-Code.

A 3.20 (M1) Bestimmen Sie die Prüfziffer p in der ISBN-10-Nummer 0-521-43108- p .

Lösung

Zur Ermittlung der Prüfziffer p berechnet man zunächst:

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 \quad .$$

Hier:

$$10 \cdot 0 + 9 \cdot 5 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 8 = 127 \quad .$$

Anschließend bestimmt man p so, dass die obige Summe durch Addition von p auf eine ohne Rest durch 11 teilbare Zahl ergänzt wird und fügt p als letzte Stelle an die ISBN an. Da hierbei $0 \leq p \leq 10$ gilt, kann auch die zweistellige Prüfziffer 10 auftreten; diese wird dann durch das Einzelzeichen X ersetzt. Für eine korrekte ISBN-10 gilt also:

$$(10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + p) \bmod 11 = 0 \quad .$$

Hier muss also $p = 5$ gewählt werden.

A 3.21 (M1) Gegeben sei ein Hamming-Code mit der nebenstehenden Kontrollmatrix M . Geben Sie für die beiden empfangenen Worte 1011010 und 1101011 an, ob es sich um ein Codewort oder ein Fehlerwort handelt. Im Falle eines Fehlerwortes: Wie lautet unter der Annahme eines 1-Bit Fehlers das korrekte Wort? Extrahieren Sie auch die Informationsbits aus den empfangenen Nachrichten.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung

Man interpretiert das empfangene Wort als Zeilenvektor und multipliziert es mit der Kontrollmatrix. Die Rechnung erfolgt modulo 2. Die Informationsbits ergeben sich aus der Bit-Reihenfolge $(p_1 p_2 i_1 p_3 i_2 i_3 i_4)$. Für 1011010 rechnet man:

$$\mathbf{x} \cdot M = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0) \quad . \quad (3.1)$$

Da das Ergebnis der Nullvektor ist, handelt sich um ein korrektes Codewort. Die Information lautet: 1010.

Für 1101011 rechnet man:

$$\mathbf{x} \cdot M = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 0) \quad . \quad (3.2)$$

Am Ergebnis liest man ab, dass das Bit an Position 6 fehlerhaft ist. Die Zählung der Positionen beginnt von links mit Position 1. Das korrekte Wort lautet: 1101001. Die Information lautet: 0001.

A 3.22 (M2) Geben Sie allgemein an, wie viele verschiedene Codewörter ein Code mit s Stellen und vorgegebener Hamming-Distanz h maximal umfassen kann. Wie viele Codewörter kann ein Code mit $s = 6$ Stellen und Hamming-Distanz $h = 5$ maximal umfassen?

Lösung

Eine obere Grenze für die Anzahl von Codewörtern, die unter dieser Bedingung gebildet werden können ergibt sich unmittelbar aus der Bedingung:

maximale Anzahl der Codewörter \leq Gesamtvolumen / Volumen einer Kugel mit Radius e .

Als Maß für das Volumen ist hier die Anzahl der enthaltenen Vektoren zu verstehen. Der gesamte lineare Raum B^s hat daher das Volumen 2^s , da er bei gegebener Dimension s , d.h. gegebener Stellenzahl der Codewörter, gerade 2^s Vektoren umfasst. Das Volumen einer Kugel mit Radius 1 umfasst den Mittelpunkt der Kugel sowie alle über eine Kante erreichbaren nächsten Nachbarn, es beträgt also $V_1 = 1 + s$. Als obere Grenze für die Anzahl n_1 der Codewörter, für welche die Korrigierbarkeit von Einzelfehlern gefordert wird,

ergibt sich also:

$$n_1 \leq \frac{2^s}{V_1} = \frac{2^s}{1+s} \quad .$$

Im allgemeinen Fall von e pro Codewort korrigierbaren Fehlern ist in (22) an Stelle von V_1 das Volumen V_e einer Kugel mit Radius e einzusetzen. Durch Abzählen aller Punkte, die von dem betrachteten Punkt aus über maximal e Kanten erreichbar sind, erhält man:

$$V_e = 1 + \sum_{i=1}^e \binom{s}{i} \quad .$$

Die obere Grenze für die Anzahl n_e der s -stelligen Codewörter eines Codes, für welche die Korrigierbarkeit von e Fehlern möglich ist, lautet damit:

$$n_e \leq \frac{2^s}{V_e} = \frac{2^s}{1 + \sum_{i=1}^e \binom{s}{i}} \quad .$$

Dieses Ergebnis bedeutet nur, dass n_e eine Obergrenze für die Anzahl der Codewörter ist. Es wird jedoch nichts darüber ausgesagt, ob diese Anzahl tatsächlich erreichbar ist und wie derartige Codes konstruiert werden können.

Für $s = 6$ und $h = 5$ folgt zunächst $e = (h - 1)/2 = 2$ und damit:

$$n_2 \leq \frac{2^6}{1 + \binom{6}{1} + \binom{6}{2}} = \frac{2^6}{1 + 6 + 15} = \frac{64}{22} \approx 2,91 \quad .$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.4

A 3.23 (T0) Warum führt die LZW-Kompression in der Regel zu einer stärkeren Redundanz-Minimierung als das Huffman-Verfahren?

Lösung

Beim Huffman-Verfahren werden nur Einzelzeichen codiert, beim LZW-Verfahren dagegen Zeichengruppen. Dadurch werden auch bedingte Auftretenswahrscheinlichkeiten bzw. Korrelationen berücksichtigt, so dass in Nachrichten, die solche Korrelationen enthalten, eine weitere Redundanzminimierung erreicht wird.

A 3.24 (T1) Ordnen Sie die fünf Kompressionsverfahren MPEG, JPEG, LZW, RLC (Run Length Code), PDC (Prädiktive Differenzcodierung) den folgenden fünf Datenarten zu, für welche sie jeweils am besten geeignet sind: Videofilm, Computerprogramm, CAD-Strichzeichnung, Digitalfoto, Temperaturmesswerte mit 100 Messungen/s.

Lösung

Videofilm	MPEG
Computerprogramm	LZW
CAD-Strichzeichnung	RLC
Mit einer Digitalkamera aufgenommenes Foto	JPEG
Temperaturmesswerte mit 100 Messungen/sec	PDC

A 3.25 (L3) Komprimieren Sie das Wort HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA (ein nach einem Fischchen benannter Cocktail aus Hawaii) mit arithmetischer und LZW-Kompression.

Lösung

Arithmetische Kompression

Der Quelltext HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ist arithmetisch zu codieren. Dazu werden zunächst die Auftretswahrscheinlichkeiten p_i der Einzelzeichen x_i ermittelt. Danach wird jedem Zeichen ein Intervall $[u, o[$ mit zum Intervall gehöriger Untergrenze u und nicht mehr zum Intervall gehöriger Obergrenze o zugeordnet, dessen Länge zu der entsprechenden Auftretswahrscheinlichkeit proportional ist. Man erhält folgende Tabelle:

Zeichen Auftretswahsch.		Intervall
c_i	p_i	$[u; o[$
A	3/21	[0,0000000000000000;0,142857142847143[
H	2/21	[0,142857142847143;0,238095238095238[
K	2/21	[0,238095238095238;0,333333333333333[
M	2/21	[0,333333333333333;0,428571428571429[
N	2/21	[0,428571428571429;0,523809523809524[
P	1/21	[0,523809523809524;0,571428571428571[
U	9/21	[0,571428571428571;1,000000000000000[

Zur eigentlichen Codierung wird als Startwert das Intervall $[0,0;1,0[$ mit der Untergrenze $u = 0,0$ und der (nicht mehr zum Intervall gehörenden) Obergrenze $o = 1,0$ hergenommen. Die Untergrenze und die Obergrenze dieses Intervalls werden nun durch die Schritt für Schritt eingelesenen Zeichen des Textes entsprechend der Unter- und Obergrenze ihres Intervalls immer weiter eingegrenzt. Dies geschieht durch Berechnung immer neuer, monoton wachsender Untergrenzen und monoton fallender Obergrenzen. Damit geschieht die Kompression Schritt für Schritt wie folgt:

Zeichen c_i	Intervalllänge d	Untergrenze u	Obergrenze o
Initialisierung	0,0	0,0	1,0
H	1.0000000000000000	0.142857142857143	0.238095238095238
U	0.095238095238095	0.197278911564626	0.238095238095238
M	0.040816326530612	0.210884353741497	0.214771622934888
U	0.003887269193392	0.213105650423435	0.214771622934888
H	0.001665972511454	0.213343646496499	0.213502310545209
U	0.000158664048710	0.213434311667191	0.213502310545209
M	0.000067998878019	0.213456977959864	0.213463454043484
U	0.000006476083621	0.213460678579076	0.213463454043484
N	0.000002775464409	0.213461868063822	0.213462132393766
U	0.000000264329944	0.213462019109504	0.213462132393766
K	0.000000113284262	0.213462046081948	0.213462056870925
U	0.000000010788977	0.213462052247077	0.213462056870925
N	0.000000004623847	0.213462054228726	0.213462054669093
U	0.000000000440366	0.213462054480364	0.213462054669093
K	0.000000000188728	0.213462054525300	0.213462054543274
U	0.000000000017974	0.213462054535571	0.213462054543274
A	0.000000000007703	0.213462054535571	0.213462054536671
P	0.000000000001100	0.213462054536147	0.213462054536199
U	0.000000000000052	0.213462054536177	0.213462054536199
A	0.000000000000022	0.213462054536177	0.213462054536180
A	0.000000000000003	0.213462054536177	0.213462054536177

Das Ergebnis lautet also: $x = 0,213462054536177$. Es sind also 15 Dezimalstellen erforderlich, eine im Vergleich zu den ursprünglich 21 Zeichen erhebliche Kompressionsleistung, zumal die Dezimalstellen als Block-Code mit weniger Bit darstellbar sind als das Ausgangsalphabet der ASCII-Zeichen. In einem professionellen Programm würde man natürlich Hexadezimalziffern statt Dezimalziffern verwenden, so dass die Darstellung noch etwas komprimierter wäre und 4 Bit pro Ziffer für die Codierung genügen. Dazu kommt allerdings, dass die Häufigkeiten der Einzelzeichen ebenfalls mit übertragen werden müssen, da diese für die Dekompression erforderlich sind.

Aus dem codierten Text, also der Gleitpunktzahl $x = 0,213462054536177$, kann der Ursprungstext durch Umkehrung des Kompressionsalgorithmus wie folgt wieder gewonnen werden.

Die Berechnung ist per Hand auch mit Taschenrechner sehr mühsam. Es empfiehlt sich, dafür ein Programm zu schreiben.

LZW-Kompression

Beim LZW-Algorithmus wird zunächst eine Code-Tabelle mit allen Einzelzeichen des Quell-Alphabets, wobei die Wortlänge des Ziel-Alphabets um einige Bit größer gewählt wird, als die des Quell-Alphabets. Im Laufe der Kompression wird dann die Code-Tabelle um Codes für Zeichengruppen erweitert, so dass die Kompression immer effizienter wird.

Für die Code-Tabelle werden in diesem Beispiel Einträge mit vier Bit gewählt. Da das Quell-Alphabet nur sieben Zeichen umfasst, bleiben nach der Vorbesetzung noch neun Plätze für spätere Einträge frei:

Zeichenkette	Ausgabe-Code (binär)	Ausgabe-Code (hex)
A	0000	0
H	0001	1
K	0010	2
M	0011	3
N	0100	4
P	0101	5
U	0110	6
–	0111	7
–	1000	8
–	1001	9
–	1010	A
–	1011	B
–	1100	C
–	1101	D
–	1110	E
–	1111	F

Der Codierungsvorgang läuft damit folgendermaßen ab:

Schritt	Zeichen <i>c</i>	Präfix <i>P</i>	Eintrag in Code-Tabelle	Ausgabe
0	–	–	Vorbesetzung	–
1	H	H	–	–
2	U	U	HU = 7	1
3	M	M	UM = 8	6
4	U	U	MU = 9	3
5	H	H	UH = A	6
6	U	HU	–	–
7	M	M	HUM = B	7
8	U	MU	–	–
9	N	N	MUN = C	9
10	U	U	NU = D	4
11	K	K	UK = E	6
12	U	U	KU = F	2
13	N	N	Tabelle voll	6
14	U	NU		–
15	K	K		D
16	U	KU		–
17	A	A		F
18	P	P		0
19	U	U		5
20	A	A		6
21	A	A		0
22				0

Nach der Kompression hat die Code-Tabelle die folgende Form:

Zeichenkette	Ausgabe-Code (binär)	Ausgabe-Code (hex)
A	0000	0
H	0001	1
K	0010	2
M	0011	3
N	0100	4
P	0101	5
U	0110	6
HU	0111	7
UM	1000	8
MU	1001	9
UH	1010	A
HUM	1011	B
MUN	1100	C
NU	1101	D
UK	1110	E
KU	1111	F

Der Ausgangsstring HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA wurde in den aus 17 Zeichen mit je vier Bit bestehenden Ergebnisstring 1636794626DF05600 konvertiert, der somit 68 Bit umfasst. Die sieben Zeichen des Quell-Alphabets kann man mit einem Block-Code von 3 Bit Länge darstellen, so dass die 21 Zeichen des zu komprimierenden Wortes nur 63 Bit umfassen. So gesehen ergibt sich keine Kompressionsleistung. Legt man jedoch als Alphabet die ASCII-Zeichen mit 8 Bit Länge zu Grunde und wählt man für die Code-Tabelle 9 Bit, so ergäbe sich immerhin eine Kompression von $21 \cdot 8 = 168$ Bit auf $17 \cdot 9 = 153$ Bit.

Anzumerken ist noch, dass bei der Dekompression keine weiteren Informationen erforderlich sind, wenn man sich zuvor auf ein bestimmtes Alphabet verständigt hat.

A 3.26 (L2) Lässt sich der String ANTANANARIVO (das ist die Hauptstadt von Madagaskar) oder PAPA-YAPALMEN (die wachsen in Madagaskar, sind aber eigentlich keine Palmen) durch den LZW-Algorithmus effizienter codieren? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Die Strings ANTANANARIVO und PAPA-YAPALMEN sind beide 12 Zeichen lang und sie bestehen beide aus 7 verschiedenen Buchstaben. Es sei n die Anzahl der pro Zeichen in der Code-Tabelle verwendeten Bits. Teilt man die Strings in Zeichengruppen auf, für deren Codierung jeweils n Bits erforderlich sind, so erhält man:

A N T A N A N A R I V O

Länge: $9n$ Bit

P A P A Y A P A L M E N

Länge $10n$ Bit

Die Kompression ist also für ANTANANARIVO um 10% effizienter als für PAPA-YAPALMEN.

A 3.27 (M1) Es soll ein aus 2^{16} Zeichen bestehender Text komprimiert werden, dessen Quellalphabet aus 40 mit gleicher Häufigkeit auftretenden Zeichen besteht. Weiter sei nichts über den Text und das Alphabet bekannt.

- Berechnen Sie die Entropie dieses Alphabets.
- Wie viele Bits pro Zeichen benötigt man mindestens für eine Codierung mit einem binären Blockcode?
- Ist das folgende Kompressionsverfahren für dieses Beispiel sinnvoll? Man kann eine Anzahl n von Codewörtern mit 5 Bit und die verbleibenden $40 - n$ Codewörter mit 6 Bit codieren. Dabei muss n so

bestimmt werden, dass die mittlere Wortlänge möglichst klein wird.

- d) Wie viele Byte umfasst dann der komprimierte Text? Welchem Kompressionsfaktor entspricht dies im Vergleich mit dem Blockcode aus a)?

Lösung

- a) Für die Entropie gilt mit $p_i = 1/40$:

$$H = \sum_{i=1}^{40} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = 40 \cdot \frac{1}{40} \log_2 40 = 5,3219 \text{ Bit/Zeichen.}$$

- b) Wegen $H = 5,3219$ Bit/Zeichen benötigt man für einen Block-Code (Code mit konstanter Wortlänge) mindestens 6 Bit pro Zeichen.
 c) Man berechnet für dieses Verfahren:

$$(5n + (40 - n) \cdot 6) / 40 \geq 5,3219 \Rightarrow n \leq 240 - 5,3219 \cdot 40 = 27,124 \Rightarrow n = 27.$$

Allerdings ergibt sich dafür das Problem, dass die Fano-Bedingung nicht notwendigerweise erfüllt ist. Man könnte zur Erfüllung der Fano-Bedingung beispielsweise alle 6-Bit-Worte mit 0 beginnen und alle 5-Bit-Worte mit 1. Man hat also Codewörter der Art 0xxxxx und 1xxxx. Dies ergibt 32 Wörter mit 6 Bit und 16 Wörter mit 5 Bit. Man wird also als Optimum $n = 16$ wählen, also 16 Wörter mit 5 Bit und 24 Wörter mit 6 Bit codieren.

- d) Die mittlere Wortlänge ist $L = (16 \cdot 5 + 24 \cdot 6) / 40 = 5,6$.
 Die Anzahl der Bytes des komprimierten Textes ist also $5,6 \cdot 2^{16} / 8 = 0,7 \cdot 2^{16}$.
 Die Anzahl der Bytes des unkomprimierten Textes ist $6 \cdot 2^{16} / 8 = 0,75 \cdot 2^{16}$.
 Der Kompressionsfaktor beträgt $k = 5,6 / 6 = 0,93\bar{3}$.

A 3.28 (L3) Gegeben sei das unten stehende, aus den Grauwerten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bestehende Bild.

- a) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Grauwerte.
 b) Geben Sie für die Grauwerte einen Binärcode mit minimaler konstanter Wortlänge an und berechnen Sie die Größe (in Bit) des so codierten Bildes.

1	1	2	2	2	2	1	1
1	1	2	2	2	2	1	1
1	1	1	4	4	1	1	1
3	3	3	4	4	3	3	3
1	1	5	5	5	5	1	1
1	1	5	5	5	5	1	1
1	1	5	5	5	5	1	1
1	6	6	1	1	6	6	1
1	6	6	1	1	6	6	1
1	6	6	1	1	6	6	1

- c) Berechnen Sie die Entropie des gegebenen Bildes.
 d) Konstruieren Sie unter Verwendung des Huffman-Verfahrens einen optimalen Code mit variabler Wortlänge. Berechnen Sie dabei auch die mittlere Wortlänge und die Redundanz. Wie viel Bit umfasst nun das Bild?
 e) Konstruieren Sie nun einen möglichst effizienten Lauflängen-Code. Wie viele Bit umfasst das Bild, wenn man es mit diesem Lauflängen-Code codiert?
 f) Wie groß ist das Bild, wenn man es, so weit möglich, mit einem Quadtree codiert?
 g) Codieren Sie nun das Bild mit dem LZW-Verfahren. Wie groß ist das Bild jetzt?

Lösung

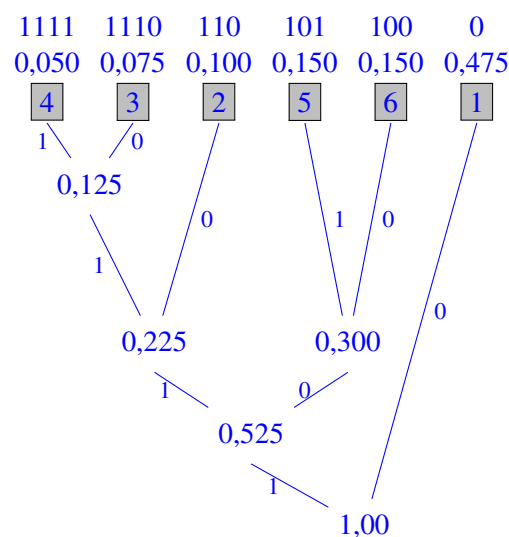
- a) Die Auftrittshäufigkeiten und die daraus berechneten Auftrittswahrscheinlichkeiten sind in der folgenden Tabelle eingetragen.
- b) Bei sechs mit einem Code konstanter Wortlänge zu codierenden Worten ist die minimale Wortlänge 3. In der Tabelle ist ein entsprechender Code als Code_{Block} eingetragen. Code_H ist der Huffman-Code aus Aufgabe (d).

Als Bildgröße ergibt sich damit $80 \cdot 3 = 240$ Bit.

x_i	Anzahl	p_i	$I(x_i)$	Code _{Block}	Code _H
1	38	0,475	1,0740	001	0
2	8	0,100	3,3219	010	110
3	6	0,075	3,7370	011	1110
4	4	0,050	4,3219	100	1111
5	12	0,150	2,7370	101	101
6	12	0,150	2,7370	110	100

c) Entropie: $H \approx 2,1598$ Bit/Zeichen.

d) Huffman-Baum:



Mittlere Wortlänge: $L = 2,1750$ Bit/Zeichen.

Redundanz: $R = 2,1750 - 2,1598 = 0,0152$ Bit/Zeichen.

Das Bild hat damit die Länge $38 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 12 \cdot 3 + 12 \cdot 3 = 174$ Bit.

- e) Für die Lauflängen-Codierung kann man beispielsweise folgende Zuordnung wählen:
 $1 = 01, 2 = 10, 3 = 11, 4 = 00$.

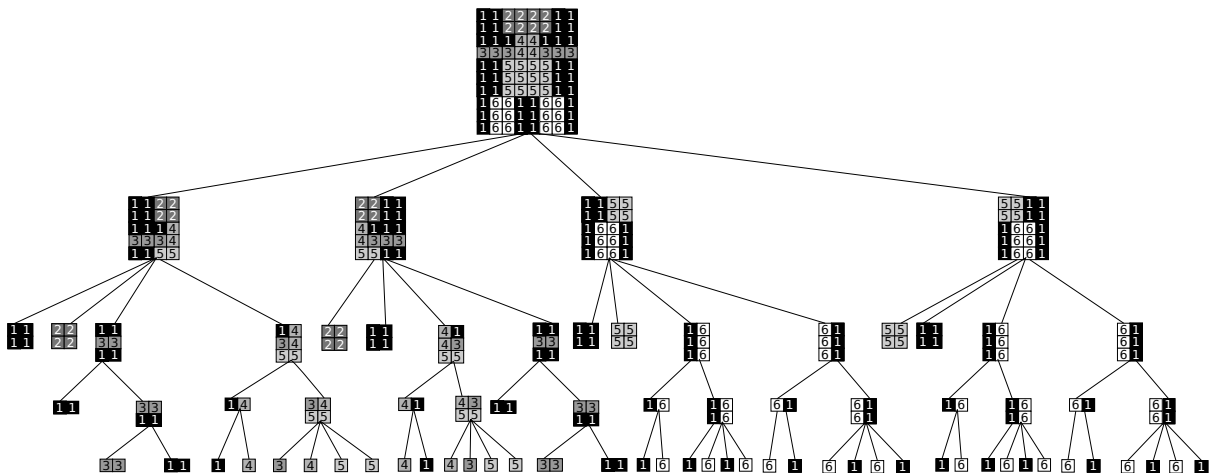
Bildgröße für Lauflängen-Codierung und Block-Code: 180 Bit.

1	1	2	2	2	2	1	1	10001 00010 10001
1	1	2	2	2	2	1	1	10001 00010 10001
1	1	1	4	4	1	1	1	11001 10100 11001
3	3	3	4	4	3	3	3	11011 10100 11011
1	1	5	5	5	5	1	1	10001 00101 10001
1	1	5	5	5	5	1	1	10001 00101 10001
1	1	5	5	5	5	1	1	10001 00101 10001
1	6	6	1	1	6	6	1	01001 10110 10001 10110 01001
1	6	6	1	1	6	6	1	01001 10110 10001 10110 01001
1	6	6	1	1	6	6	1	01001 10110 10001 10110 01001

Bildgröße für Lauflängen-Codierung und Huffman-Code: 142 Bit.

1	1	2	2	2	2	1	1	100 00110 100
1	1	2	2	2	2	1	1	100 00110 100
1	1	1	4	4	1	1	1	110 101111 110
3	3	3	4	4	3	3	3	111110 101111 111110
1	1	5	5	5	5	1	1	100 00101 100
1	1	5	5	5	5	1	1	100 00101 100
1	1	5	5	5	5	1	1	100 00101 100
1	6	6	1	1	6	6	1	010 10110 100 10110 010
1	6	6	1	1	6	6	1	010 10110 100 10110 010
1	6	6	1	1	6	6	1	010 10110 100 10110 010

f) Ein Quadtree könnte wie folgt aussehen:



Benötigt werden 41 Bit für die Baumstruktur, gefolgt von 50 Grauwerten (Blätter). Diese benötigen bei Verwendung des Block-Codes 150 Bit, also insgesamt 191 Bit. Verwendet man den Huffman-Code an Stelle des Block-Codes, dann reduziert sich der Platzbedarf der Grauwerte auf $22 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 114$ Bit, insgesamt also 155 Bit.

g) Dargestellt ist im Folgenden eine LZW-Kompression mit 4 Bit pro Codewort. Die Codetabelle wird dabei jeweils neu initialisiert, wenn sie voll ist. Der benötigte Speicherplatzbedarf ist damit 184 Bit. Ohne Neuinitialisierung wären es 224 Bit.

Zeichenkette	Ausgabe-Code (binär)	Ausgabe-Code (hex)
1	0000	0
2	0001	1
3	0010	2
4	0011	3
5	0100	4
6	0101	5
–	0110	6
–	0111	7
–	1000	8
–	1001	9
–	1010	A
–	1011	B
–	1100	C
–	1101	D
–	1110	E
–	1111	F

Der Codierungsvorgang läuft damit folgendermaßen ab:

Schritt	Zeichen <i>c</i>	Präfix <i>P</i>	Eintrag in Code-Tabelle	Ausgabe
0	–	–	Vorbesetzung	–
1	1	1	-	-
2	1	1	11	1 =0
3	2	2	12	1 =0
4	2	2	22	2 =1
5	2	22	-	-
6	2	2	222	22 =8
7	1	1	21	2 =1
8	1	11	-	-
9	1	1	111	11 =6
10	1	11	-	-
11	2	2	112	11 =6
12	2	22	-	-
13	2	222	-	-
14	2	2	2222	222 =9
15	1	21	-	-
16	1	1	211	21 =10
17	1	11	-	-
18	1	111	-	-
19	1	1	1111	111 =11

Codetabelle voll:

Zeichenkette	Ausgabe-Code (hex)
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
11	6
12	7
22	8
222	9
21	A
111	B
112	C
2222	D
211	E
1111	F

Schritt	Zeichen c	Präfix P	Eintrag in Code-Tabelle	Ausgabe
20	4	4	14	1 =0
21	4	4	44	4 =3
22	1	1	41	4 =3
23	1	1	11	1 =0
24	1	11	-	-
25	3	3	113	11 =8
26	3	3	33	3 =2
27	3	33	-	-
28	4	4	334	33 =10
29	4	44	-	-
30	3	3	443	44 =6
31	3	33	-	-
32	3	3	333	33 =10
33	1	1	31	3 =2
34	1	11	-	-
35	5	5	115	11 =8

Codetabelle voll:

Zeichenkette	Ausgabe-Code (hex)
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
44	6
41	7
11	8
113	9
33	A
334	B
443	C
333	D
31	E
115	F

Schritt	Zeichen <i>c</i>	Präfix <i>P</i>	Eintrag in Code-Tabelle	Ausgabe
36	5	5	55	5 =4
37	5	5	55	5 =4
38	5	55	-	-
39	1	1	551	55 =6
40	1	1	11	1 =0
41	1	11	-	-
42	1	1	111	11 =8
43	5	5	15	1 =0
44	5	55	-	-
45	5	5	555	55 =6
46	5	55	-	-
47	1	551	-	-
48	1	1	5511	551 =7
49	1	11	-	-
50	1	111	-	-
51	5	5	1115	111 =9
52	5	55	-	-
53	5	555	-	-
54	5	5	5555	555 =11
55	1	1	51	5 =4
56	1	11	-	-
57	1	111	-	-

Codetabelle voll:

Zeichenkette	Ausgabe-Code (hex)
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
55	6
551	7
11	8
111	9
15	A
555	B
5511	C
1115	D
5555	E
51	F

Schritt	Zeichen <i>c</i>	Präfix <i>P</i>	Eintrag in Code-Tabelle	Ausgabe
58	6	6	1116	111 =9
59	6	6	66	6 =5
60	1	1	61	6 =5
61	1	1	11	1 =0
62	6	6	16	1 =0
63	6	66	-	-
64	1	1	661	66 =6
65	1	11	-	-
66	6	6	116	11 =8
67	6	66	-	-
68	1	661	-	-
69	1	1	6611	661 =10
70	6	16	-	-
71	6	6	166	16 =9
72	1	61	-	-
73	1	1	611	61 =7
74	6	16	-	-
75	6	166	-	-
76	1	1	1661	166 =13
77	1	11	-	-
78	6	116	-	-

Codetabelle voll:

Zeichenkette	Ausgabe-Code (hex)
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
66	6
61	7
11	8
16	9
661	A
116	B
6611	C
166	D
611	E
1661	F

Schritt	Zeichen <i>c</i>	Präfix <i>P</i>	Eintrag in Code-Tabelle	Ausgabe
79	6	6	1166	116 =11
80	1	1	61	6 =5
81	-	-	-	1 =0

Ende. Codetabelle:

Zeichenkette	Ausgabe-Code (hex)
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
61	6
–	7
–	8
–	9
–	A
–	B
–	C
–	D
–	E
–	F

A 3.29 (P3) Schreiben Sie C-Programme für folgende Datenkompressions-Methoden:

- Differenzcodierung mit vier Bit langen Blockcodes und zwei Codewörtern pro Byte.
- LZW-Datenkompression.

Lösung

Der Source-Code wird separat zur Verfügung gestellt.

4 Lösungen zu Kapitel 4 – Verschlüsselung

Übungsaufgaben zu Kapitel 4

A 4.1 (M1) Warum ist bei der Verschlüsselung mit multiplikativen Schlüsseln bei einem Alphabet mit $n = 26$ Zeichen der multiplikative Schlüssel $k = 6$ nicht verwendbar?

Lösung

$k = 6$ ist nicht verwendbar, da die Gleichung $x^{-1} \cdot 6 \bmod 26 = 1$ nicht erfüllbar ist und 6 daher keine modulare Inverse hat. Feststellbar ist dies, weil gilt $\text{ggT}(26, 6) = 2 \neq 1$. Die Verwendung von $k = 6$ hätte daher zur Folge, dass die Verschlüsselung nicht eindeutig wäre.

A 4.2 (M2) Bob möchte Alice die Nachricht „ferien“ senden. Die beiden haben die Verwendung der 26 lateinischen Großbuchstaben vereinbart, A entspricht also 0, B entspricht 1 usw. Sie benutzen zur Verschlüsselung den multiplikativen Schlüssel 5 und den additiven Schlüssel 8. Wie lautet der Geheimtext, den Bob sendet? Für die Entschlüsselung benötigt Alice die modulare Inverse des multiplikativen Schlüssels 5. Berechnen Sie diese und entschlüsseln Sie die von Alice empfangene Nachricht.

Lösung

Zur Verschlüsselung eines Zeichens x dient folgende Formel:

$$y = (k \cdot x + d) \bmod n$$

mit $k = 5$, $d = 8$ und $n = 26$.

Im Folgenden werden alle Operationen modulo 26 durchgeführt. Bob rechnet also:

Klartext:	f e r i e n
numerische Darstellung:	5 4 17 8 4 13
Multipl. mit $k = 5$:	25 20 7 14 20 13
Add. von $d = 8$:	7 2 15 22 2 21
Ergebnis:	H C P W C V

Für die Entschlüsselung muss Alice rechnen:

$$x = (y - d) \cdot k^{-1} \bmod n.$$

Dabei ist k^{-1} die modulare Inverse von k . Diese lässt sich z. B. aus dem Satz von Euler bestimmen:

$$k^{-1} = k^{\Phi(n)-1} \bmod n \quad .$$

Mit $\Phi(26) = \Phi(2)\Phi(13) = 1 \cdot 12 = 12$ erhält man $k^{-1} = 5^{11} \bmod 26 = 21$. Zur Prüfung des Ergebnisses rechnet man $5 \cdot 21 \bmod 26 = 1$.

Alice rechnet somit:

Nachricht:	H C P W C V
numerische Darstellung:	7 2 15 22 2 21
Subtraktion von $d = 8$:	25 20 7 14 20 13
Multipl. mit $k^{-1} = 21$:	5 4 17 8 4 13
Ergebnis:	f e r i e n

A 4.3 (M2) Alice sendet Bob die verschlüsselte Nachricht CHJF. Die beiden haben die Verwendung der 26 lateinischen Buchstaben mit den Positionen im Alphabet als numerische Codierung (also A=0 bis Z=25) vereinbart und sie benutzen zur Verschlüsselung den multiplikativen Schlüssel $k = 3$ und den additiven Schlüssel $s = 5$. Wie bestimmt Alice aus der empfangenen verschlüsselten Nachricht den Klartext und wie lautet dieser?

Cleo hat die Nachricht CHJF abgefangen und außerdem Bobs Abfalleimer durchwühlt. Dort hat sie einen Papierschnipsel mit dem Text *ha* gefunden, in welchem sie den zu CH gehörenden Klartext vermutet. Berechnen Sie daraus (unter der Annahme, dass ein entsprechendes Verschlüsselungsverfahren verwendet wurde) den additiven Schlüssel s und den multiplikativen Schlüssel k .

Lösung

Für die Entschlüsselung muss Alice rechnen:

$$x = (y - s) \cdot k^{-1} \pmod{n}.$$

mit $k = 3$, $s = 5$ und $n = 26$. Dabei ist k^{-1} die modulare Inverse von k . Diese lässt sich z. B. aus dem Satz von Euler bestimmen:

$$k^{-1} = k^{\Phi(n)-1} \pmod{n}.$$

Mit $\Phi(26) = \Phi(2)\Phi(13) = 1 \cdot 12 = 12$ erhält man $k^{-1} = 3^{11} \pmod{26} = 9$. Zur Prüfung des Ergebnisses rechnet man $3 \cdot 9 \pmod{26} = 1$.

Alice rechnet somit:

Nachricht:	C H J F
numerische Darstellung:	2 7 9 5
Subtraktion von $s = 5$:	23 2 4 0
Multipl. mit $k^{-1} = 9$:	25 18 10 0
Ergebnis:	z s k a

HINWEIS: Für die folgende Rechnung ist leider die Angabe in Auflage 5 falsch. Es muss heißen: „Cleo hat die Nachricht CHJF abgefangen und außerdem Bobs Abfalleimer durchwühlt. Dort hat sie einen Papierschnipsel mit dem Text *zs* gefunden ...“.

Cleo vermutet, dass der auf dem Papierschnipsel gefundene Text *zs* zu den verschlüsselten Zeichen CH gehört. Daraus berechnet sie den additiven Schlüssel s und den multiplikativen Schlüssel k wie folgt:

Die numerischen Darstellungen der Zeichen gemäß ihrer Position im Alphabet lauten:

$C : y_1 = 2, H : y_2 = 7, z : x_1 = 25, s : x_2 = 18$.

Mit $y_i = x_i k + s$ ergeben sich daraus die beiden Gleichungen für k und $s \pmod{26}$:

$$(1) \quad 2 = 25 \cdot k + s$$

$$(2) \quad 7 = 18 \cdot k + s.$$

Aus (2) – (1) folgt:

$$5 = -7k \quad \rightarrow \quad 5 = 19k \quad \rightarrow \quad k = 5 \cdot 19^{-1} = 5 \cdot 11 = 3 \pmod{26}.$$

Einsetzen von $k = 3$ in (1) liefert: $2 = 75 + s \rightarrow s = -73 \rightarrow s = 5$.

Alternativ ergibt sich aus (2): $7 = 54 + s \rightarrow s = -47 \rightarrow s = 5$.

A 4.4 (M1) Bob sendet die folgende verschlüsselte Nachricht an seine Freundin Alice:

HVOBVXVEXCYVHRUXYSTIJLZOJXVLZAX. Cleo fängt die Nachricht ab. Sie weiß, dass Bob und Alice einen Vigenère-Code verwenden. Als ersten Schritt der Entschlüsselung muss Cleo daher die Schlüssellänge bestimmen. Ermitteln Sie die wahrscheinlichste Schlüssellänge für die verschlüsselte Nachricht.

Lösung

Cleo wendet den Kasiski-Test an, d. h. sie bestimmt die die Primfaktoren der Abstände der häufigsten Zeichen. Die am häufigsten auftretenden Primfaktoren bzw. deren häufigste Produkte sind dann Kandidaten für die Schlüssellänge.

Die häufigsten Buchstaben sind V und X, die beide 5 Mal auftreten.

Die Abstände zwischen den Vs sind:

$$3, 5, 10 = 2 \cdot 5, 25 = 5 \cdot 5, \quad 2, 7, 22 = 2 \cdot 11, \quad 5, 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5, \quad 15 = 3 \cdot 5.$$

Die Abstände zwischen den Xen sind:

$$3, 10 = 2 \cdot 5, 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5, 25 = 5 \cdot 5, \quad 7, 17, 22 = 2 \cdot 11, \quad 10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5, \quad 5.$$

Die Häufigkeiten der Abstände lauten also: 14 mal 5, 10 mal 2, 4 mal 3. Die wahrscheinlichste Schlüssellänge ist also 5.

A 4.5 (L1) Der Text MARIA wurde unter Verwendung des 7-Bit ASCII-Codes mit einem One-Time-Pad verschlüsselt. Das Ergebnis ist JOSEF. Wie lautet der One-Time-Pad?

Lösung

Die Verschlüsselung erfolgt durch bitweise XOR-Verknüpfung des im ASCII-Code dargestellten Klartextes mit einer nur einmal verwendeten Bit-Maske $m_1 m_2 m_3 m_4 m_5$, die ebenso lang ist wie der Klartext (One-Time-Pad). Die Wahrheitstabelle der XOR-Verknüpfung lautet:

$$1 \text{ XOR } 1 = 0,$$

$$1 \text{ XOR } 0 = 1,$$

$$0 \text{ XOR } 1 = 1,$$

$$0 \text{ XOR } 0 = 0$$

Die XOR-Verknüpfung ist involutorisch, es gilt also: $a \text{ XOR } m = b$ und $b \text{ XOR } m = a$. Für dieses Beispiel rechnet man dementsprechend:

$$M = J \text{ XOR } m_1 \rightarrow 1001101 = 1001010 \text{ XOR } m_1 \rightarrow m_1 = 0000101$$

$$A = O \text{ XOR } m_2 \rightarrow 1000001 = 1001111 \text{ XOR } m_2 \rightarrow m_2 = 0001110$$

$$R = S \text{ XOR } m_3 \rightarrow 1010010 = 1010011 \text{ XOR } m_3 \rightarrow m_3 = 0000001$$

$$I = E \text{ XOR } m_4 \rightarrow 1001001 = 1000101 \text{ XOR } m_4 \rightarrow m_4 = 0001100$$

$$A = F \text{ XOR } m_5 \rightarrow 1000001 = 1000110 \text{ XOR } m_5 \rightarrow m_5 = 0000111$$

Das One-Time-Pad lautet also: 00001010001110000000100011000000111.

A 4.6 (T1) Was sind Falltürfunktionen und Einwegfunktion?

Lösung

Einwegfunktionen sind injektive Funktionen $f : X \rightarrow Y$, für die $y = f(x)$ für alle $x \in X$ effizient berechenbar ist, für die aber $x = f^{-1}(y)$ aus der Kenntnis von y nicht effizient (also nur mit exponentieller Komplexität) berechenbar ist.

Falltürfunktionen sind spezielle Einwegfunktionen, bei denen ebenfalls $y = f(x)$ effizient berechenbar ist, aber auch $x = f^{-1}(y)$, wenn eine Zusatzinformation (ein Schlüssel) bekannt ist.

A 4.7 (M2) Berechnen Sie $\text{ggT}(16269, 693)$ und $31^{4123} \bmod 40251$.

Lösung

$\text{ggT}(16269, 693)$:

$\text{ggT}(x, y) = \text{ggT}(y, x \bmod y)$ für $y > 0$, $\text{ggT}(x, 0) = x$.

$\text{ggT}(16269, 693) = \text{ggT}(693, 330) = \text{ggT}(330, 33) = \text{ggT}(33, 0) = 33$.

Berechnung von $31^{4123} \bmod 40251$:

Es gilt: $a \cdot b \bmod n = (a \bmod n)(b \bmod n) \bmod n$

oder für $a = b$: $a^2 \bmod n = (a \bmod n)(a \bmod n) \bmod n$.

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung der Regel für beliebige Potenzen:

$a^m \bmod n = (a^k \bmod n)^j \cdot (a^{m-kj} \bmod n) \bmod n$.

Geschickt ist eine Zerlegung des Exponenten in Zweierpotenzen und Klammerung nach Horner Schema:

$$4123 = 4096 + 27 = 4096 + 16 + 8 + 2 + 1,$$

also

$$\begin{aligned} 31^{4123} &= 31^{4096} \cdot 31^{16} \cdot 31^8 \cdot 31^2 \cdot 31^1, \\ &= (31^{2048} \cdot 31^8 \cdot 31^4 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\ &= ((31^{512} \cdot 31^2 \cdot 31)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\ &= (((31^{256} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\ &= (((((31^{22222222} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31) \end{aligned}$$

Die Klammern werden nun von innen nach außen ausgewertet. Dabei wird nach jeder Operation sofort das Ergebnis modulo 40251 reduziert. Auf diese Weise entstehen niemals Zahlen, die größer als das Quadrat des

Moduls 40251 sind:

$$\begin{aligned}
 &= (((((31^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((((37999^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((((40129^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((((14884^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((((32203^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((((6445^{2^2} \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((((39244^2 \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((((7774 \cdot 31)^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (((39739^2 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31 \\
 &= (((20638 \cdot 31)^2)^2 \cdot 31 \\
 &= ((36013^2)^2 \cdot 31 \\
 &= (8698^2 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= (23575 \cdot 31)^2 \cdot 31 \\
 &= 6307^2 \cdot 31 \\
 &= 10261 \cdot 31 \\
 &= 36334 \pmod{40251}
 \end{aligned}$$

A 4.8 (M2) Beim RSA-Verfahren wird im Schlüsselverzeichnis eine Zahl n veröffentlicht, die das Produkt zweier großer Primzahlen p und q ist, sowie für jeden Teilnehmer ein öffentlicher Schlüssel c , für den $\text{ggT}(c, \Phi(n)) = 1$ gilt. Jeder Teilnehmer erhält ferner als geheimen Schlüssel d die modulare Inverse von c bezüglich $\Phi(n)$. Zur Verschlüsselung einer Nachricht x dient die Funktion $y = x^c \pmod n$ und zur Entschlüsselung die Funktion $x = y^d \pmod n$.

- Es sei $p = 3$ und $q = 11$. Ermitteln Sie die kleinste für Bob als öffentlicher Schlüssel c in Frage kommende Zahl. Berechnen Sie nun Bobs geheimen Schlüssel d .
- Alice möchte an Bob die Nachricht „ei“ senden. Berechnen Sie die buchstabenweise verschlüsselte Nachricht y . Dabei wird als numerische Codierung der Buchstaben deren Position im Alphabet, beginnend mit a=1 verwendet.
- Bob hat die Nachricht 26, 3 empfangen und möchte sie entschlüsseln. Wie rechnet er?

Lösung

- $n = 3 \cdot 11 = 33$,
 $\Phi(n) = (p-1) \cdot (q-1) = 2 \cdot 10 = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$.
Für c muss gelten:

$1 < c < \Phi(n)$, $\text{ggT}(c, \Phi(n)) = 1$.

Daraus folgt, dass $c = 3$ der kleinste mögliche öffentliche Schlüssel ist.

Man ermittelt nun aus der Bedingung $c \cdot d \bmod \Phi(n) = 1$ den geheimen Schlüssel d als die modulare Inverse zu c , z. B. aus dem Satz von Euler:

$$d = c^{-1} = c^{\Phi(n)-1} \bmod \Phi(n) \quad .$$

also

$$d = 3^{-1} = 3^{\Phi(20)-1} \bmod 20 \quad .$$

Es gilt $\Phi(20) = \Phi(2 \cdot 2 \cdot 5) = 2 \cdot 4 = 8$ und damit

$$d = 3^7 \bmod 20 = 7 \quad .$$

b) e entspricht $x_e = 5$, i entspricht $x_i = 9$. Alice entnimmt dem öffentlichen Schlüsselverzeichnis Bobs öffentlichen Schlüssel (n, c) und rechnet:

$$y_e = x_e^c \bmod n = 5^3 \bmod 33 = 26,$$

$$y_i = x_i^c \bmod n = 9^3 \bmod 33 = 3.$$

c) Bob empfängt die Nachricht 26, 3 und rechnet mit seinem geheimen Schlüssel $d = 7$:

$$x_e = y_e^d \bmod n = 26^7 \bmod 33 = 5, \text{ entsprechend „c“},$$

$$x_i = y_i^d \bmod n = 3^7 \bmod 33 = 9, \text{ entsprechend „i“}.$$

5 Lösungen zu Kapitel 5 – Computerhardware und Maschinensprache

Übungsaufgaben zu Kapitel 5.2

A 5.1 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was wird durch die Aussagenlogik beschrieben?
- Was ist eine logische Verknüpfung?
- Geben Sie die Absorptionsgesetze an.
- Was ist ein boolescher Verband?
- Was ist ein Venn-Diagramm?
- Was ist eine binäre Schaltfunktion?
- Beschreiben Sie das boolesche Normalformtheorem.
- Was sind Maxterme und Minterme?
- Was sind benachbarte Terme?

Lösung

- In der Aussagenlogik studiert man als Wahrheitsfunktionen bezeichnete Verknüpfungen von Aussagen durch logische Operatoren, deren Ergebnisse wiederum Aussagen sind. Unter Aussagen versteht man in der Aussagenlogik Elemente a, b, c, \dots einer Menge, wobei diese Elemente – neben anderen, in diesem Zusammenhang nicht relevanten Eigenschaften – einen Wahrheitswert besitzen, der nur die beiden Zustände „wahr“ oder „falsch“ annehmen kann.
- Zur Verknüpfung Aussagen werden die folgenden logischen Grundverknüpfungen verwendet:

Verknüpfung	Name	gebräuchliche Schreibweisen
nicht a	Negation	$\neg a, \bar{a}$
a und b	Konjunktion	$a \wedge b, a \& b, a \cdot b, ab$
a oder b	Disjunktion	$a \vee b, a + b$
wenn a dann b	Implikation	$a \rightarrow b, a \Rightarrow b$
a genau dann wenn b	Äquivalenz	$a \leftrightarrow b, a \Leftrightarrow b$

Der Wahrheitswert des Ergebnisses einer Wahrheitsfunktion hängt nur von den Wahrheitswerten der Argumente der Wahrheitsfunktion ab. Da es nur zwei Wahrheitswerte gibt, kann man sämtliche Wahrheitsfunktionen durch endliche Tabellen eindeutig definieren. Für die oben genannten Verknüpfungen lauten die zugehörigen Tabellen:

Zweistellige Verknüpfungen

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Einstellige Verknüpfung

a	$\neg a$
0	1
1	0

Da Aussagen nur die beiden Wahrheitswerte „wahr“ bzw. 1 und „falsch“ bzw. 0 annehmen können, kann es genau $2^2 = 4$ einstellige und $2^4 = 16$ zweistellige logische Verknüpfungen geben. Man kann zeigen dass man alle diese Verknüpfungen durch oben bereits definierten Grundverknüpfungen Konjunktion, Disjunktion und Negation ausgedrückt kann.

- c) Die Absorptionsgesetze lauten: $a \wedge (a \vee b) = a$ und $a \vee (a \wedge b) = a$
- d) Zur Definition eines booleschen Verbands siehe Buch, Kap. 5.2.2, S. 179.
- e) Venn-Diagramme dienen in der Mengenlehre zur anschaulichen, grafischen Darstellung der Verknüpfung von Mengen. Es gibt eine strukturelle Übereinstimmung (Isomorphie) der Mengenlehre mit der Aussagenlogik: „oder“ entspricht „Vereinigung“, „und“ entspricht „Durchschnitt“ und „nicht“ entspricht „Komplementbildung“. Deswegen hat man auch die an die Symbole der Mengenoperationen erinnernde Schreibweise und für die logischen Verknüpfungen „oder“ und „und“ eingeführt. Wegen dieser Isomorphie lassen sich auch logische Verknüpfungen durch Venn-Diagramme anschaulich darstellen, wie im Buch in Abb. 5.10 auf S. 180 gezeigt.
- f) siehe Buch Kap. 5.2.2, S. 180, Abschnitt „Schaltfunktionen“.
- g) Das boolesche Normalform-Theorem liefert eine einfache Möglichkeit, aus der Wahrheitstabelle einer Schaltfunktion die Schaltfunktion selbst zu konstruieren. Zur Herleitung siehe Buch, Kap. 5.2.3, S. 181.
- h) Minterme und Maxterme sind Bestandteile der disjunktiven bzw. konjunktiven Normalform. Details hierzu siehe Buch, Kap. 5.2.3, S. 181.
- i) Zur Beschreibung benachbarter Terme siehe Buch, Kap. 5.2.4, S. 182.

A 5.2 (L1) Stellen Sie die zweistelligen logischen Verknüpfungen Implikation, NOR, NAND, Äquivalenz und XOR unter ausschließlicher Verwendung von Konjunktion, Disjunktion und Negation dar.

Lösung

$$\text{NOR: } a \text{ NOR } b = \neg(a \vee b)$$

$$\text{NAND: } a \text{ NAND } b = \neg(a \wedge b)$$

$$\text{Äquivalenz: } a \Leftrightarrow b = (a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b)$$

$$\text{XOR: } a \text{ XOR } b = \neg(a \Leftrightarrow b) = (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)$$

A 5.3 (L2) Vereinfachen Sie den folgende booleschen Ausdruck so weit wie möglich:

$$(a \wedge b \wedge d) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{d}).$$

Lösung

$$\begin{aligned} (a \wedge b \wedge d) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \bar{d}) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c) \\ &= a \wedge (b \vee \bar{b} \wedge c) \\ &= a \wedge (b \vee c) \\ &= a \wedge b \vee a \wedge c \end{aligned}$$

A 5.4 (L2) Vereinfachen Sie die folgende Schaltfunktion so weit wie möglich und geben Sie das Ergebnis unter ausschließlicher Verwendung von NAND an:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3).$$

Lösung

Terme, die sich nur in einer Variablen unterscheiden, werden zusammengefasst:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \\ &= (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \\ &= (x_1 \wedge x_3) \vee \bar{x}_2 \\ &= \overline{\overline{(x_1 \wedge x_3) \vee \bar{x}_2}} \\ &= \overline{(x_1 \wedge x_3)} \wedge x_2 \\ &= \text{NAND}(\text{NAND}(x_1, x_3), x_2) \end{aligned}$$

A 5.5 (L3) Geben Sie die konjunktive und die disjunktive Normalform der folgenden Schaltfunktion an:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \text{ XOR } (x_1 \wedge x_3) \text{ XOR } (x_2 \wedge x_3) \text{ XOR } \overline{(x_1 \wedge x_3)}.$$

Lösung

Für XOR gilt: $a \text{ XOR } b = (\bar{a} \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b})$.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 \wedge x_2) \text{ XOR } (x_1 \wedge x_3) \text{ XOR } (x_2 \wedge x_3) \text{ XOR } \overline{(x_1 \wedge x_3)} \\ &= (x_1 \wedge x_2) \text{ XOR } (x_2 \wedge x_3) \text{ XOR } 1, \quad \text{da } (x_1 \wedge x_3) \text{ XOR } \overline{(x_1 \wedge x_3)} = 1 \\ &= \overline{((x_1 \wedge x_2) \wedge (x_2 \wedge x_3)) \vee ((x_1 \wedge x_2) \wedge \overline{(x_2 \wedge x_3)})} \text{ XOR } 1 \\ &= \overline{((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_2 \wedge x_3)) \vee ((x_1 \wedge x_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3))} \text{ XOR } 1 \\ &= \overline{((\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_2 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3))} \text{ XOR } 1 \\ &= \overline{((\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3))} \text{ XOR } 1 \\ &= \overline{((\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)) \wedge 1} \vee (((\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3)) \wedge 0) \\ &= (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \quad \text{konjunktive Normalform} \\ &= (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\ &\quad \text{disjunktive Normalform} \end{aligned}$$

A 5.6 (L3) Es seien f und g zwei n -stellige Schaltfunktionen. Dann sind auch logische Verknüpfungen wie $f \wedge g$ etc. ebenfalls Schaltfunktionen. Zeigen Sie:

- $f \vee (\neg f \wedge g) = f \vee g$,
- $f \vee (f \wedge g) = f$,
- $f = g$ gilt genau dann, wenn $(\neg f \wedge g) \vee (f \wedge \neg g) = 0$ gilt.

Lösung

- a) $f \vee (\neg f \wedge g) = (f \vee \neg f) \wedge (f \vee g) = f \vee g$
 b) $f \vee (f \wedge g) = (f \wedge 1) \vee (f \wedge g) = f \wedge (1 \vee g) = f \wedge 1 = f$
 c) $f = g \Leftrightarrow (\neg f \wedge g) \vee (f \wedge \neg g) = 0$ ist zu zeigen.

Man nimmt zunächst an, $f = g$ sei richtig und beweist, dass daraus $(\neg f \wedge g) \vee (f \wedge \neg g) = 0$ folgt. Man beweist also die Richtung \Rightarrow :

$$(\neg g \wedge g) \vee (g \wedge \neg g) = 0 \vee 0 = 0.$$

Nun nimmt man an, $(\neg f \wedge g) \vee (f \wedge \neg g) = 0$ sei richtig und beweist, dass daraus $f = g$ folgt. Man beweist also die Richtung \Leftarrow :

- 1) $0 = \neg g \wedge 0 = \neg g \wedge ((\neg f \wedge g) \vee (f \wedge \neg g)) = (\neg g \wedge \neg f \wedge g) \vee (\neg g \wedge f \wedge \neg g) = 0 \vee (\neg g \wedge f \wedge \neg g) = f \wedge \neg g.$
- 2) $1 = \neg 0 = \neg((\neg f \wedge g) \vee (f \wedge \neg g)) = (f \vee \neg g) \wedge (\neg f \vee g) = ((f \vee \neg g) \wedge \neg f) \vee ((f \vee \neg g) \wedge g) = ((f \wedge \neg f) \vee (\neg g \wedge \neg f)) \vee ((f \wedge g) \vee (\neg g \wedge g)) = (\neg g \wedge \neg f) \vee (f \wedge g).$
- 3) $g = g \wedge 1 = g \wedge ((\neg g \wedge \neg f) \vee (f \wedge g)) = (g \wedge \neg g \wedge \neg f) \vee (g \wedge f \wedge g) = 0 \vee (g \wedge f \wedge g) = g \wedge f.$
- 4) $g = g \vee 0 = (g \wedge f) \vee 0 = (g \wedge f) \vee (f \wedge \neg g) = f \wedge (g \vee \neg g) = f.$

A 5.7 (L3) Eine Schaltfunktion y mit drei Eingängen x_1, x_2, x_3 sei durch folgende Funktionstabelle gegeben:

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$y = f(x_1, x_2, x_3)$	0	1	1	0	0	1	1	1

Geben Sie die Schaltfunktion in disjunktiver Normalform an, erstellen Sie das zugehörige KV-Diagramm und vereinfachen Sie die Funktion so weit wie möglich.

Lösung

Das zugehörige allgemeine Karnaugh-Veitch-Diagramm für drei Variablen lautet:

	x_2		\bar{x}_2			x_2		\bar{x}_2	
x_1	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$x_1 \bar{x}_2 x_3$	x_1	m_6	m_7	m_5	m_4
\bar{x}_1	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 x_2 x_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	\bar{x}_1	m_2	m_3	m_1	m_0
	\bar{x}_3		x_3			\bar{x}_3	x_3	\bar{x}_3	

In die den Mintermen entsprechenden Felder trägt man nun je nach dem gegebenen Wert $y = 0$ oder $y = 1$ der Schaltfunktion eine 0 oder eine 1 ein. Man erhält:

	x_2	\bar{x}_2	
x_1	1	1	0
\bar{x}_1	1	0	0
	\bar{x}_3	x_3	\bar{x}_3

Aus den 5 Feldern mit den Einträgen folgt die disjunktive Normalform mit den Mintermen:

$$y = m_6 \vee m_7 \vee m_5 \vee m_2 \vee m_1 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$$

Aus dem KV-Diagramm ist ersichtlich, dass beispielsweise m_2 und m_6 sowie m_1 und m_5 benachbart sind und daher zusammen gefasst werden können. Dies ergibt die Lösung:

$$y = x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Alternativ dazu könnte man die Schaltfunktion auch durch die den Einträgen 0 entsprechende konjunktive Normalform mit den Maxtermen darstellen:

$$y = M_0 \wedge M_3 \vee M_4 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

Übungsaufgaben zu Kapitel 5.3

A 5.8 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Erläutern Sie den Unterschied zwischen Schaltnetzen und Schaltwerken.
- Was versteht man unter einer kombinatorischen Schaltung?
- Beschreiben Sie die Aufgabe eines Dekodierers.
- Was ist eine Pseudo-Tetrade?
- Grenzen Sie die Begriffe Halb-, Voll- und Serienaddierer gegeneinander ab.
- Wozu werden Flip-Flops in erster Linie eingesetzt?
- Nennen Sie vier unterschiedliche Flip-Flop-Typen und charakterisieren Sie diese.

Lösung

- Schaltnetz: technische Realisierung einer Schaltfunktion; siehe Buch Kap. 5.3, S. 185.
Schaltwerk: Schaltnetz mit Verzögerungs- und Rückkopplungsgliedern; siehe Buch Kap. 5.3, S. 190.
- kombinatorische Schaltung: Zustand der Ausgänge hängt ausschließlich vom Zustand der Eingänge ab. Die Abhängigkeit der Ausgangssignale von den Eingangssignalen wird dabei in der Regel durch eine Schaltfunktion definiert, die wiederum als Wahrheitstabelle angegeben wird.
- Aufgabe eines Dekodierers: Transformation einer Anzahl von Eingangssignalen in die Ausgangssignale nach einer vorgegebenen Regel; siehe z. B. im Buch Abb. 5.15, S. 187.
- Pseudo-Tetrade: In manchen Fällen spielen nicht alle Kombinationen der Eingangsvariablen für die Schaltfunktion eine Rolle. Ein Beispiel dafür ist die Ansteuerung der sieben Elemente einer 7-Segmentanzeige zur Darstellung der Ziffern 0 bis 9 (siehe Buch Abb. 5.16, S. 187). Die 7 Segmente a bis g können durch Decodierung von vier Eingängen x_0 bis x_3 an- und ausgeschaltet werden. Dazu wird eine negative Logik verwendet, d. h. „0“ bedeutet „Segment an“ und „1“ bedeutet „Segment aus“. Da nur die 10 Ziffern 0 bis 9 anzuzeigen sind, mit vier Eingängen aber 16 Kombinationen existieren, spielen offenbar sechs prinzipiell mögliche Kombinationen keine Rolle. Man bezeichnet diese als Pseudo-Tetraden.
- Halbaddierer: dient zur Addition von zwei binären Stellen a und b . Das Ergebnis wird in zwei Ausgängen angegeben, nämlich der Summe s und dem Übertrag (Carry) c .
Volladdierer: Aus zwei Halbaddierern lässt sich ein Volladdierer aufbauen. Ein Volladdierer hat drei Eingänge: a, b und c , wobei c der Übertrag aus der Addition der vorhergehenden binären Stelle ist. Wie der Halbaddierer, so hat auch der Volladdierer zwei Ausgänge, nämlich die Summe S und den Übertrag C .
Serienaddierer: Volladdierer, bei dem der Übertrag über ein Verzögerungsglied in den Addierer zurückgekoppelt wird.
- Einsatz von Flip-Flops in erster Linie als schneller Speicher in CPU-Registern oder statischem Speicher.
- Flip-Flop-Typen: RS-FF, JK-FF, T-FF, D-FF; siehe Buch Kap. 5.3.3, S. 190.

A 5.9 (L1) Erstellen Sie eine Wertetabelle und einen Schaltplan mit möglichst wenig Gattern für die folgende Schaltfunktion: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$.

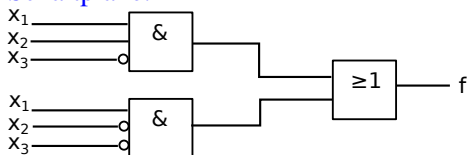
Lösung

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3) = x_1 \wedge \bar{x}_3.$$

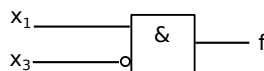
Die Vereinfachung ergibt, dass die Schaltfunktion lediglich die Verknüpfung $x_1 \wedge \bar{x}_3$ darstellt.

x_1	0 0 0 0 1 1 1 1
x_2	0 0 1 1 0 0 1 1
x_3	0 1 0 1 0 1 0 1
$y = f(x_1, x_2, x_3)$	0 0 0 0 1 0 1 0

Schaltpläne:



Direkte Übertragung der Schaltfunktion



reduzierte Form

A 5.10 (L3) Gesucht ist eine Schaltung derart, dass eine Lampe von drei verschiedenen Schaltern ein- bzw. ausgeschaltet werden kann (eine sog. Kreuzschaltung). Erstellen Sie eine Wertetabelle, finden und minimieren Sie eine Schaltfunktion und geben Sie eine Schaltung an, die ausschließlich NOR-Gatter verwendet. Betrachten Sie dabei drei Varianten:

- Die Lampe soll genau dann brennen, wenn genau ein Schalter geschlossen ist.
- Die Lampe soll genau dann brennen, wenn mindestens ein Schalter geschlossen ist.
- Die Lampe soll genau dann nicht brennen, wenn genau ein Schalter geöffnet ist.

Lösung

- Bei der gesuchten Schaltung muss die Lampe eingeschaltet sein, wenn entweder Schalter s_1 oder s_2 oder s_3 eingeschaltet ist, also den logischen Wert 1 annimmt. Die Bedingung $f(0, 0, 0) = 0$ bedeutet, dass die Lampe ausgeschaltet ist, wenn alle drei Schalter ausgeschaltet sind. Die Wertetabelle, die Schaltfunktion und die Schaltung lauten damit:

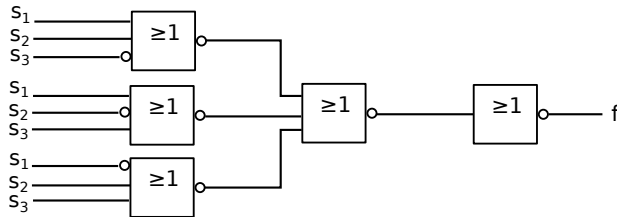
s_1	0 0 0 0 1 1 1 1
s_2	0 0 1 1 0 0 1 1
s_3	0 1 0 1 0 1 0 1
$y = f(s_1, s_2, s_3)$	0 1 1 0 1 0 0 0

Daraus ergibt sich (3 Minterme):

$$f(s_1, s_2, s_3) = (\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2 \wedge s_3) \vee (\bar{s}_1 \wedge s_2 \wedge \bar{s}_3) \vee (s_1 \wedge \bar{s}_2 \wedge \bar{s}_3).$$

Umwandlung in NOR-Gatter:

$$\begin{aligned}
 (\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2 \wedge s_3) \vee (\bar{s}_1 \wedge s_2 \wedge \bar{s}_3) \vee (s_1 \wedge \bar{s}_2 \wedge \bar{s}_3) &= \overline{\overline{\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2 \wedge s_3}} \vee \overline{\overline{\bar{s}_1 \wedge s_2 \wedge \bar{s}_3}} \vee \overline{\overline{s_1 \wedge \bar{s}_2 \wedge \bar{s}_3}} \\
 &= \overline{(s_1 \vee s_2 \vee \bar{s}_3)} \vee \overline{(s_1 \vee \bar{s}_2 \vee s_3)} \vee \overline{(\bar{s}_1 \vee s_2 \vee s_3)} \\
 &= \overline{\overline{(s_1 \vee s_2 \vee \bar{s}_3)}} \vee \overline{\overline{(s_1 \vee \bar{s}_2 \vee s_3)}} \vee \overline{\overline{(\bar{s}_1 \vee s_2 \vee s_3)}}
 \end{aligned}$$



- b) Bei der gesuchten Schaltung muss die Lampe eingeschaltet sein, wenn mindestens einer der drei Schalter geschlossen ist. Das Ergebnis lautet damit:

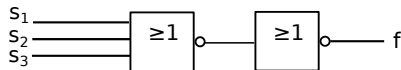
s_1	0 0 0 0 1 1 1 1
s_2	0 0 1 1 0 0 1 1
s_3	0 1 0 1 0 1 0 1
$y = f(s_1, s_2, s_3)$	0 1 1 1 1 1 1 1

Daraus ergibt sich (1 Maxterm):

$$f(s_1, s_2, s_3) = s_1 \vee s_2 \vee s_3.$$

Umwandlung in NOR-Gatter:

$$f(s_1, s_2, s_3) = s_1 \vee s_2 \vee s_3 = \overline{\overline{s_1 \vee s_2 \vee s_3}}.$$



- c) Wertetabelle:

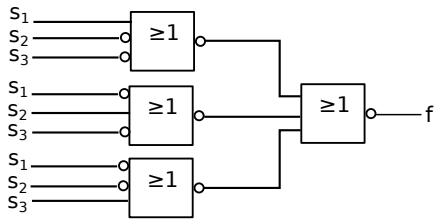
s_1	0 0 0 0 1 1 1 1
s_2	0 0 1 1 0 0 1 1
s_3	0 1 0 1 0 1 0 1
$y = f(s_1, s_2, s_3)$	1 1 1 0 1 0 0 1

Daraus ergibt sich (3 Maxterme):

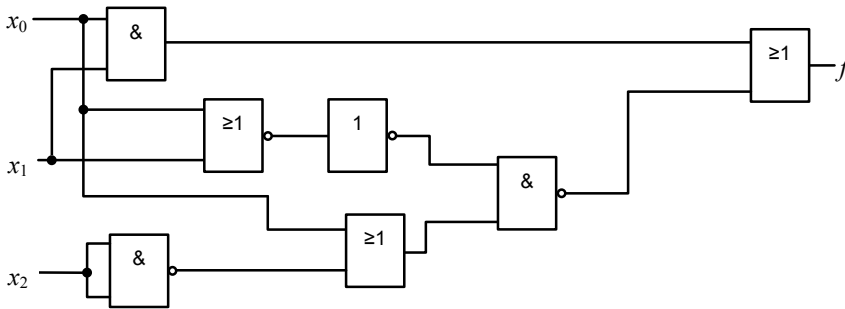
$$f(s_1, s_2, s_3) = (s_1 \vee \bar{s}_2 \vee \bar{s}_3) \wedge (\bar{s}_1 \vee s_2 \vee \bar{s}_3) \wedge (\bar{s}_1 \vee \bar{s}_2 \vee s_3).$$

Umwandlung in NOR-Gatter:

$$\begin{aligned}
 (s_1 \vee \bar{s}_2 \vee \bar{s}_3) \wedge (\bar{s}_1 \vee s_2 \vee \bar{s}_3) \wedge (\bar{s}_1 \vee \bar{s}_2 \vee s_3) &= \overline{\overline{(s_1 \vee \bar{s}_2 \vee \bar{s}_3)}} \wedge \overline{\overline{(\bar{s}_1 \vee s_2 \vee \bar{s}_3)}} \wedge \overline{\overline{(\bar{s}_1 \vee \bar{s}_2 \vee s_3)}} \\
 &= \overline{\overline{(s_1 \vee \bar{s}_2 \vee \bar{s}_3)}} \vee \overline{\overline{(\bar{s}_1 \vee s_2 \vee \bar{s}_3)}} \vee \overline{\overline{(\bar{s}_1 \vee \bar{s}_2 \vee s_3)}}
 \end{aligned}$$



A 5.11 (L2) Geben Sie für die nachfolgende Schaltung eine Schaltfunktion in konjunktiver Normalform an.



Lösung

$$\begin{aligned}
 f(x_0, x_1, x_2) &= (x_0 \wedge x_1) \vee \overline{\overline{(x_0 \vee x_1)} \wedge (x_0 \vee \bar{x}_2)} \\
 &= (x_0 \wedge x_1) \vee \overline{(x_0 \vee x_1) \wedge (x_0 \vee \bar{x}_2)} \\
 &= (x_0 \wedge x_1) \vee (\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1) \vee (\bar{x}_0 \wedge x_2) \\
 &= (x_0 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_0 \wedge x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_0 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2) \\
 &= m_7 \vee m_6 \vee m_1 \vee m_0 \vee m_3 \quad \text{Minterme, disjunktive Normalform} \\
 &= \overline{m_5 \vee m_4 \vee m_2} \quad \text{verbleibende Minterme mit } f = 0 \\
 &= \overline{(x_0 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_0 \wedge x_1 \wedge \bar{x}_2)} \\
 &= M_5 \wedge M_4 \wedge M_2 \quad \text{Maxterme, konjunktive Normalform} \\
 &= (\bar{x}_0 \vee x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (x_0 \vee \bar{x}_1 \vee x_2)
 \end{aligned}$$

A 5.12 (L3) Geben Sie ein Schaltnetz mit vier Eingängen und vier Ausgängen an, welches das Produkt aus zwei zweistelligen Dualzahlen liefert. In der Schaltung dürfen Halbaddierer verwendet werden.

Lösung

Es seien a und b zwei zweistellige Dualzahlen:

$$a = a_1 a_0, \quad b = b_1 b_0 \quad .$$

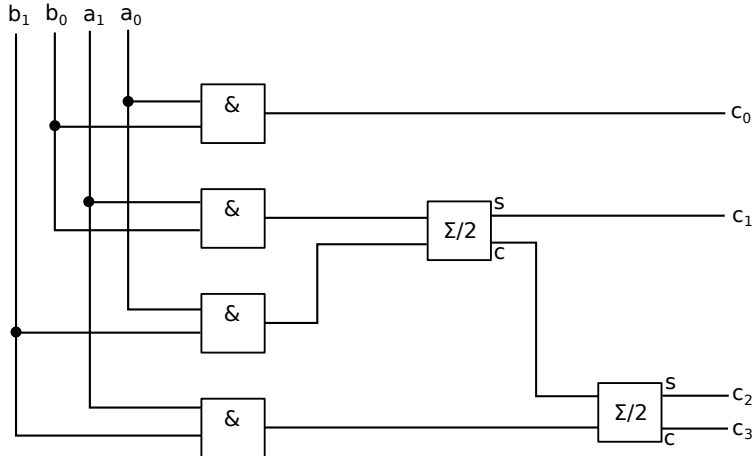
Für das Ergebnis der Multiplikation $c = a \cdot b$ Man erhält man:

$$c = c_3 c_2 c_1 c_0 = b_1 b_0 \cdot a_1 a_0 \quad ,$$

entsprechend:

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0 & a_1 \wedge b_1 & a_0 \wedge b_1 & 0 \\
 + & 0 & 0 & a_1 \wedge b_0 & a_0 \wedge b_0 \\
 \hline
 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0
 \end{array}$$

Die zugehörige Schaltung hat die folgende Form:



Übungsaufgaben zu Kapitel 5.5

A 5.13 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Beschreiben Sie kurz die Vor- und Nachteile von memory-mapped und isolated I/O.
- Erläutern Sie die Wirkungsweise der Adressierungsart ARI und erklären Sie, warum gerade diese Adressierungsart in der Praxis besonders wichtig ist.
- Erläutern Sie den Unterschied zwischen arithmetischer und logischer Verschiebung.
- Grenzen Sie die Bedeutung des C-Flag und des X-Flag gegeneinander ab.
- Welche Adressierungsarten werden vor allem bei Stack-Operationen angewendet.

Lösung

- Beschreibung siehe Buch, Kap. 5.4.4, S. 209.
Memory-mapped I/O ist weniger komplex, weshalb die CPU einfacher (und billiger) aufgebaut werden kann. Es benötigt keine separaten Befehle/Register. Es gibt keinen Unterschied zu normalen Speicherzugriffen, alle Register und Adressierungsarten sind nutzbar.
Allerdings muss ein Teil des Adressbereichs für I/O reserviert werden, was den nutzbaren Speicherplatz reduziert. In heute üblichen 32 bzw. 64 Bit Systemen ist dies jedoch kein großes Problem.
- Die Adresse eines Operanden ist bei der indirekten Adressierung (Address Register Indirect, ARI) in einem Adressregister abgelegt. Siehe hierzu Buch, Kap. 5.4.4, S. 212.
ARI ermöglicht relative Adressierung zu einer Basisadresse. Typische Beispiele sind Stack-Operation (Push, Pop).
- Siehe hierzu Buch, Kap. 5.5.2, S. 217.
- Siehe hierzu Buch, Kap. 5.4.2, S. 203.
- ARI, insbesondere Adressregister indirekt mit Predecrement und Adressregister indirekt mit Postincrement. Siehe hierzu Buch, Kap. 5.4.4, S. 212.

A 5.14 (L2) Geben Sie für die folgenden Assembler-Befehle die Adressierungsarten für Quelle und Ziel an:
a) MOVE D0, A0 b) MOVE #123, (A1) c) MOVE (A7)+, D3 d) MOVE D1, 12345

Lösung

Befehl	Adressierungsart für Quelle	Adressierungsart für Ziel
MOVE D0, A0	Datenregister direkt	Adressreg. direkt (implizit)
MOVE #123, (A1)	Konstantenadr. (immediate)	Adressregister indirekt, ARI
MOVE (A7)+, D3	ARI mit Postinkrement (Stack)	Datenregister direkt
MOVE D1, 12345	Datenregister direkt	Absolut lang

A 5.15 (P3) Ein einfacher Mikroprozessor soll Befehle der Formate OP adr und OP verarbeiten können. Dabei soll der Befehlsteil OP jeweils durch ein Byte codiert sein, die Adressen adr sollen zwei Byte lang sein und die Speicherzellen sollen ein Byte speichern können. Es sind folgende Befehle möglich, wobei AC den Akkumulator bezeichnet:

OP	Befehl	Bedeutung
A9	LDA a	Lade ein Byte von Speicherzelle a in AC
8D	STA a	Speichere das in AC enthaltene Byte in Speicherzelle a
C7	SUB a	Subtrahiere das Byte in Speicherzelle a von dem Inhalt des AC
C8	ADD a	Addiere das Byte in Speicherzelle a zu dem Inhalt von AC
76	HLT	Programmende

a) Im Hauptspeicher sei ab Speicherzelle 0100_{hex} bis 0112_{hex} ein Programm gespeichert. Ferner sollen die Speicherzellen 0113_{hex} bis 0116_{hex} Daten enthalten. Der relevante Speicherausschnitt habe folgenden Inhalt:

```
0100hex: A9 01 14 C7 01 13 8D 01
0108hex: 13 A9 01 15 C7 01 13 8D
0110hex: 01 16 76 F0 FF 0F AB 01
```

Der Befehlszähler soll nun mit 0100_{hex} initialisiert werden und das Programm soll ausgeführt werden. Geben sie für jeden Einzelschritt den Inhalt des Akkumulators an. Was steht nach Beendigung des Programms in den Speicherzellen 0113_{hex} bis 0116_{hex}?

b) Schreiben Sie unter Verwendung der oben angegebenen Befehle ein Programm, das die Inhalte der Speicherzellen 0113_{hex} und 0114_{hex} vertauscht.

Lösung

a) Ablauf:

Adresse	Befehl / Daten	Was passiert?	AC
0100	A9 0114	(0114) → AC	FF
0103	C7 0113	AC - (0113) → AC	0F = FF - 0F
0106	8D 0113	AC → (0113)	0F
0109	A9 0115	(0115) → AC	0F
010C	C7 0113	AC - (0113) → AC	00 = 0F - 0F
010F	8D 0116	AC → 0116	00
0112	76	HLT	
Speicherinhalt:			
0113: 0F	0114: FF	0115: 0F	0116: 00

b) A9 0113
8D 0115
A9 0114
8D 0113
A9 0115
8D 0114
76

6 Lösungen zu Kapitel 6 – Rechnerarchitektur

7 Lösungen zu Kapitel 7 – Rechnernetze

8 Lösungen zu Kapitel 8 – Betriebssysteme

9 Lösungen zu Kapitel 9 – Datenbanken

10 Lösungen zu Kapitel 10 – Automatentheorie und formale Sprachen

Übungsaufgaben zu Kapitel 10.1

A 10.1 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was versteht man unter dem kartesischen Mengenprodukt?
- Grenzen Sie die Begriffe Mealy- und Moore-Automat gegeneinander ab.
- Definieren Sie den Begriff Mächtigkeit im Zusammenhang mit Automaten.
- Was ist ein Akzeptor? Was ist ein endlicher Übersetzer?

Lösung

- Das kartesische Mengenprodukt $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare der Art (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Ist beispielsweise $A = \{x, y\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$, dann ist $A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$.
- Hängt die Ausgabe vom Eingabezeichen und vom aktuellen Zustand des Automaten ab, so spricht man von einem *Mealy-Automaten*: $g : Q \times \Sigma \rightarrow Y$.
Hängt die Ausgabe nur vom aktuellen Zustand ab, so spricht man von einem *Moore-Automaten*: $g : Q \rightarrow Y$.
Trotz der unterschiedlichen Definitionen sind beide Arten äquivalent: Jeder Mealy-Automat lässt sich in einen Moore-Automaten mit gleicher Funktionalität überführen und umgekehrt.
- Bei einem Automaten mit akzeptierter Sprache L wird die Anzahl der Wörter der Sprache L als deren Mächtigkeit $|L|$ bezeichnet. Ein Sprache mit unendlich vielen Wörtern hat die Mächtigkeit „abzählbar unendlich“. Allgemein bezeichnet man als die Mächtigkeit einer Menge die Anzahl der Elemente der Menge.
- Automaten mit einer Sprache L sind in der Lage, von einem Wort $w \in \Sigma^*$ zu erkennen, ob es zu L gehört oder nicht. Man lässt dazu die einzelnen Zeichen von w als Eingabezeichen auf den zu Beginn im Anfangszustand q_s befindlichen Automaten wirken. Wenn dieser mit dem letzten Zeichen von w in einen Endzustand gelangt, so ist $w \in L$, andernfalls nicht. Man bezeichnet derartige Automaten als *erkennende Automaten* oder *Akzeptoren*.
Diese sind von übersetzenden Automaten zu unterscheiden, die ein Eingabewort in ein Ausgabewort transformieren. Dies sind dann Automaten mit Ausgabe (siehe Aufgabe b). Sind Q, Σ und Y des übersetzenden Automaten außerdem endlich, so wird dieser auch als *endlicher Übersetzer* bezeichnet.

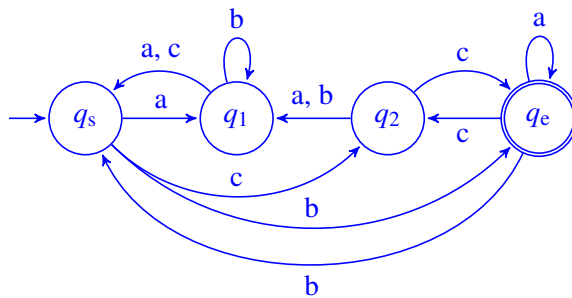
A 10.2 (L2) Gegeben sei der Automat mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $Q = \{q_s, q_1, q_2, q_e\}$, dessen Übergangsfunktion durch die Tabelle rechts definiert ist. q_s ist der Anfangs- q_e der Endzustand.

- Zeichnen Sie den Übergangsgraphen für diesen Automaten.
- Welche der folgenden Wörter gehören zur akzeptierten Sprache dieses Automaten: $abc, a^3bc^3, a^2b^2c^2, a^3b^2c^2$?

σ_i	q_s	q_1	q_2	q_e
a	q_1	q_s	q_1	q_e
b	q_e	q_1	q_1	q_s
c	q_2	q_s	q_e	q_2

Lösung

a) Übergangsdiagramm



b) Der Automat befindet sich im Anfangszustand q_s . Die Zeichen des Wortes abc werden nun von links nach rechts zeichenweise eingegeben. Dabei ergeben sich folgende Übergänge:

$$q_s, a \rightarrow q_1, \quad q_1, b \rightarrow q_1, \quad q_1, c \rightarrow q_s.$$

Insgesamt findet man also $q_s, abc \rightarrow q_s$. Der Endzustand wird offenbar nicht erreicht, dementsprechend gehört abc nicht zur akzeptierten Sprache: $abc \notin L$.

Für a^3bc^3 findet man: $q_s, a^3bc^3 \rightarrow q_e$, also gilt $a^3bc^3 \in L$.

Für $a^2b^2c^2$ findet man: $q_s, a^2b^2c^2 \rightarrow q_e$, also gilt $a^2b^2c^2 \in L$.

Für $a^3b^2c^2$ findet man: $q_s, a^3b^2c^2 \rightarrow q_2$, also gilt $a^3b^2c^2 \notin L$.

A 10.3 (L2) Konstruieren Sie einen DEA mit $\Sigma = \{a, b\}$, dessen akzeptierte Sprache L aus der Menge aller Worte aus Σ^* besteht, die mit a beginnen und bb nicht als Teilstring enthalten. Geben Sie L in der üblichen Mengenschreibweise an.

Lösung

Diagramm:

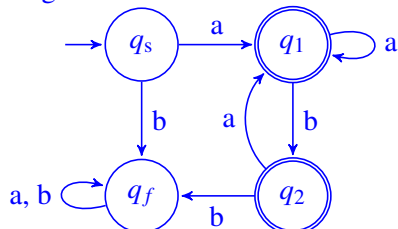


Tabelle:

σ_i	q_s	q_1	q_2	q_f
a	q_1	q_1	q_1	q_f
b	q_f	q_2	q_f	q_f

einfache Lösung: $L = \{ax \mid x \in \Sigma^*, x \text{ enthält nicht } bb\}$.

besser: $L = \{a(a|ba)^*(a|b)^n \mid n \in \{0, 1\}\}$

oder $L = \{a(a|ba)^*\} \cup \{a(a|ba)^*(a|b)\}$.

A 10.4 (L3) Geben Sie einen DEA als Übergangstabelle und als Übergangsdiagramm an, der alle aus den Ziffern 1 bis 4 gebildeten natürlichen Zahlen akzeptiert, deren Stellen monoton wachsen. Jede folgende Ziffer ist also größer oder gleich der vorangehenden, ein Beispiel dafür ist etwa die Zahl 112444.

Lösung

Diagramm (unvollständiger Automat, Fangzustand nicht eingezeichnet):

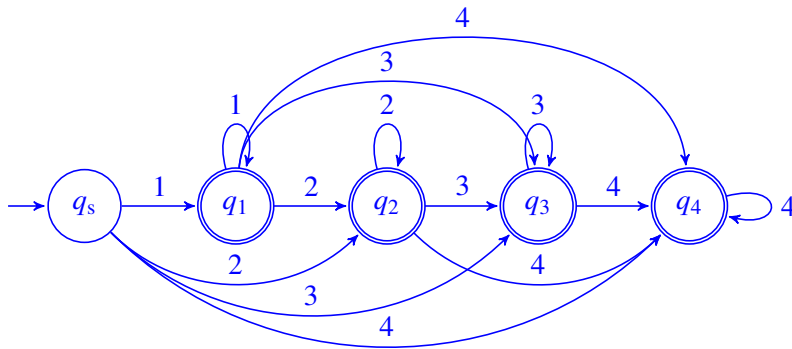


Tabelle:

σ_i	q_s	q_1	q_2	q_3	q_4	q_f
1	q_1	q_1	q_f	q_f	q_f	q_f
2	q_2	q_2	q_2	q_f	q_f	q_f
3	q_3	q_3	q_3	q_3	q_f	q_f
4	q_4	q_4	q_4	q_4	q_4	q_f

Die Zustände q_1 bis q_4 sind alle Endzustände.

A 10.5 (L3) Gegeben sei der Automat $A(\Sigma, Q, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_s, q_1, q_e\}$, Anfangszustand q_s , Endzustand q_e und δ definiert durch die unten stehende Übergangstabelle.

a) Wie interpretieren Sie, dass in der Übergangstabelle in der Spalte für q_s für die Eingabe a zwei Folgezustände q_s, q_e eingetragen sind?

σ_i	q_s	q_1	q_e
a	q_s, q_e	q_e	q_1
b	—	q_e	q_e

b) Zeichnen Sie das zum Automaten A gehörige Übergangsdiagramm.

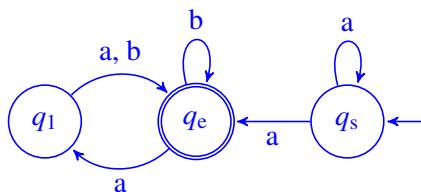
c) Geben Sie die akzeptierte Sprache $L(A)$ von A als regulären Ausdruck an.

d) Konstruieren Sie einen zu A äquivalenten deterministischen Automaten und zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm.

Lösung

a) Es handelt sich um einen nichtdeterministischen Automaten, da vom Zustand q_s mit dem Eingabezeichen a zwei Folgezustände erreicht werden können, nämlich q_s und q_e . Die Übergangstabelle beschreibt also keine eindeutige Funktion sondern eine Relation.

b) Übergangsdiagramm



c) $L(A) = a^+(b^*(a(a|b))^*)^*$

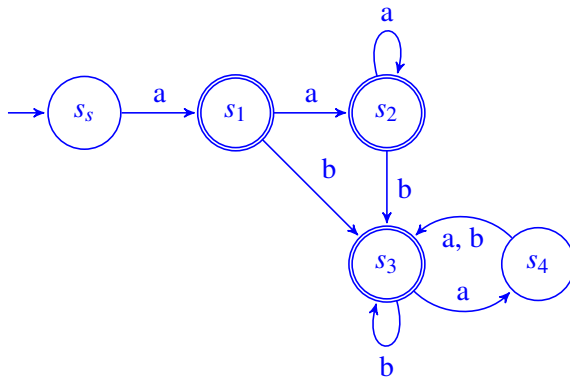
d) Konstruktion eines äquivalenten DEA:

σ_i	$\{q_s\}$	$\{q_s, q_e\}$	$\{q_s, q_e, q_1\}$	$\{q_e\}$	$\{q_1\}$
a	$\{q_s, q_e\}$	$\{q_s, q_e, q_1\}$	$\{q_s, q_e, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_e\}$
b	—	$\{q_e\}$	$\{q_e\}$	$\{q_e\}$	$\{q_e\}$

Umbenennung der Zustände (übersichtlicher):

σ_i	s_s	s_1	s_2	s_3	s_4
a	s_1	s_2	s_2	s_4	s_3
b	—	s_3	s_3	s_3	s_3

Startzustand ist s_s , Endzustände sind s_1, s_2, s_3 . Das Diagramm sind dann wie folgt aus:



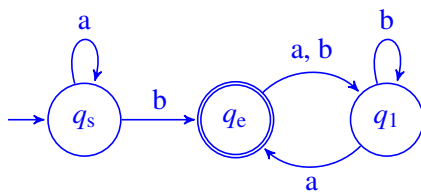
A 10.6 (L2) Gegeben sei der Automat $A(Q, \Sigma, \delta, q_s, q_e)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_s, q_1, q_e\}$ und der durch die nebenstehende Tabelle definierten Zustandsübergangsfunktion.

- Zeichnen Sie das zu A gehörige Übergangsdiagramm.
- Wie lautet die durch A akzeptierte Sprache?

σ_i	q_s	q_1	q_e
a	q_s	q_e	q_1
b	q_e	q_1	q_1

Lösung

a) Übergangsdiagramm



b) $L(A) = a^*b((a|b)b^*a)^*$

A 10.7 (L3) Beschreiben Sie ein Polynom als BNF-Produktion, als Syntaxgraph und als Automat. Ein Polynom besteht aus durch die Operatoren $+$ und $-$ verknüpften Termen. Ein Term besteht aus einer optionalen reellen Zahl, optional multipliziert mit einer beliebig langen Folge von multiplikativ verknüpften Variablen x . Ein Term darf nicht leer sein.

Beispiele für Terme: $3, 5, x, -5 * x * x, x * x * x$.

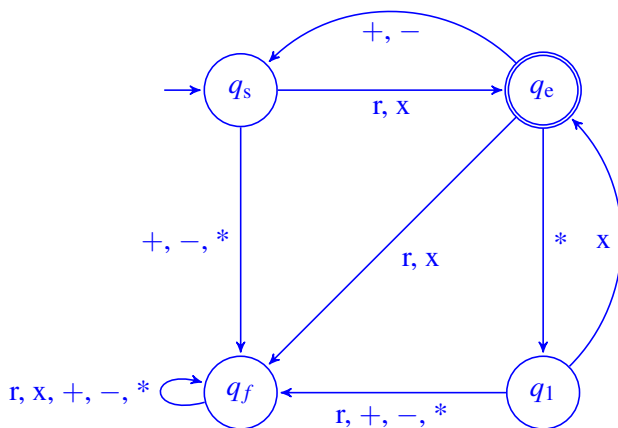
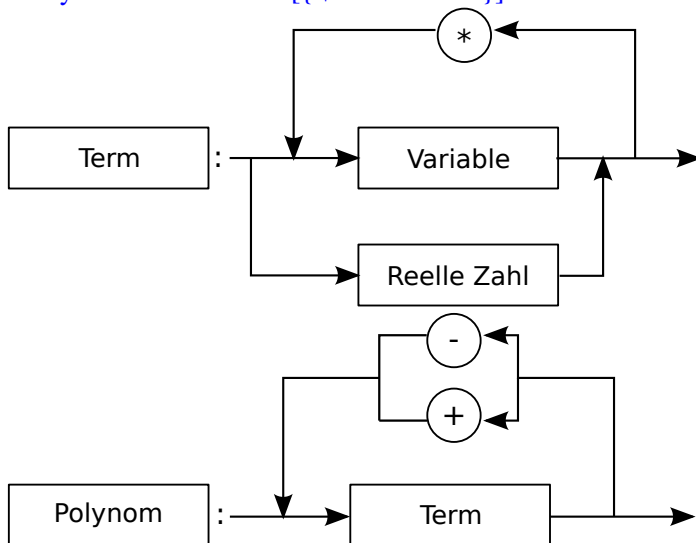
Beispiel für ein Polynom: $2 + 4 * x + x * x * x - 3,5 * x * x$.

Die syntaktischen Variablen $\langle \text{Reelle Zahl} \rangle$ und $\langle \text{Variable} \rangle$ dürfen für BNF-Produktionen und Syntaxgraphen als bekannt vorausgesetzt werden. Das Alphabet des Automaten sei $\Sigma = \{r, x, *, +, -\}$, wobei r für eine reelle Zahl und x für eine Variable steht.

Lösung

$\langle \text{Term} \rangle ::= \langle \text{Reelle Zahl} \rangle \mid \langle \text{Variable} \rangle \{ * \langle \text{Variable} \rangle \}$

$\langle \text{Polynom} \rangle ::= \langle \text{Term} \rangle \{ + \mid - \langle \text{Term} \rangle \}$



A 10.8 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

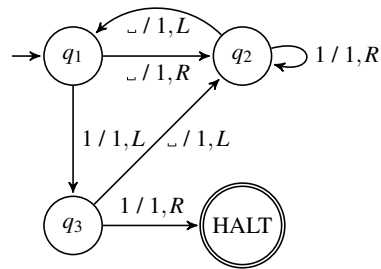
- a) Was haben Turing-Maschinen mit Berechenbarkeit zu tun?
- b) Woran ist Alan Turing gestorben?
- c) Was ist ein linear beschränkter Automat?
- d) Grenzen Sie die Begriffe Automat, Kellerautomat und Turing-Maschine gegeneinander ab.

Lösung

- a) Eine Funktion $f(x) = y$ mit $x, y \in \Sigma^*$ ist Turing-berechenbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, welche die auf dem Band gespeicherte Eingabe x in die Ausgabe y transformiert, die dann auf dem Band abgelesen werden kann. Turing-Maschinen sind Modelle für einen abstrakten Computer: alles was man prinzipiell mit einer Turing-Maschine berechnen kann, kann man auch mit einem Computer berechnen und umgekehrt.
- b) Alan Turing ist vermutlich durch Selbstmord durch einen mit Cyanid vergifteten Apfel gestorben. Dies steht wohl in Zusammenhang mit einer Hormonbehandlung, der er sich wegen seiner offenkundig gewordenen Homosexualität (die damals strafbar war) unterziehen musste.
- c) Bei linear beschränkten Automaten handelt es sich um Turing-Maschinen, bei denen nur ein durch die Länge des Eingabewortes beschränkter Bereich des Bandes verwendet wird. Linear beschränkte Automaten sind weniger mächtig als Turing-Maschinen. Auch bei linear beschränkten Automaten kann man deterministische und nichtdeterministische Varianten betrachten. Ob nichtdeterministische linear beschränkte Automaten äquivalent zu deterministischen sind, ist nicht bekannt.
Die durch nichtdeterministische linear beschränkte Automaten akzeptierten Sprachen sind zu den in Kap. 10.2 eingeführten kontextsensitiven Sprachen (Chomsky Typ 1) äquivalent.
- d) Ein Automat hat außer den internen Zuständen keinen Speicher, er erhält von außen Eingabezeichen.
Ein Kellerautomat hat einen einseitig unbegrenzten Speicher, der als Stack für Kellerzeichen verwendet wird, d. h. Zeichen dürfen nur oben auf den Stack gelegt oder oben von ihm entnommen werden. Ein Kellerautomat enthält ebenfalls von außen Eingabezeichen.
Eine Turing-Maschine hat ein beidseitig unbegrenztes lineares Speicherband, auf dem vor Start der Turing-Maschine die Eingabezeichen vorhanden sein müssen. Die Turing-Maschine kann dann die Zeichen vom Band lesen, Zeichen auf das Band schreiben und schrittweise nach rechts und links den Schreib-/Lesekopf auf dem Band bewegen.

A 10.9 (L2) Es sei die nebenstehende Turing-Maschine mit den Bandzeichen $\{_, 1\}$ als Übergangsdiagramm gegeben.

- a) Geben Sie das dazugehörige tabellarische Turing-Programm an.
- b) Der Schreib-/Lesekopf stehe auf einem mit Blank vorbesetzten Band. Was bewirkt diese Turing-Maschine?



Lösung

a)

$$1 \begin{cases} _ / 1 R 2 \\ 1 / 1 L 3 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} _ / 1 L 1 \\ 1 / 1 R 2 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} _ / 1 L 2 \\ 1 / 1 R \text{ HALT} \end{cases}$$

- b) Diese Turing-Maschine schreibt 6 1en auf ein anfänglich mit Blank vorbesetztes Band. Sie stoppt nach 13 Schritten unter der zweiten 1 von rechts.

Es handelt sich hierbei um die Busy-Beaver-Funktion $B(3)$, d. h. um diejenige aus genau drei Anweisungen bestehende Turing-Maschine, welche die größtmögliche Anzahl von aufeinander folgenden 1en auf ein anfänglich leeres Band schreibt und danach anhält.

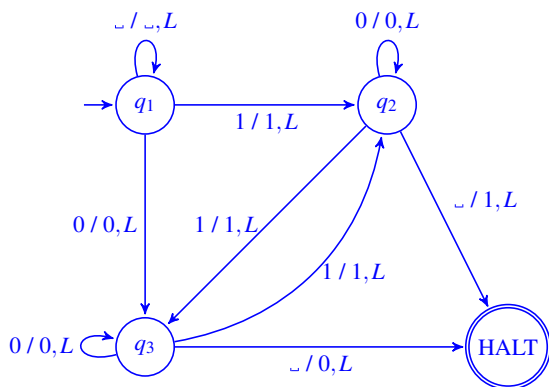
A 10.10 (L3) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine mit den Bandzeichen $\Gamma = \{_, 0, 1\}$, welche für eine zusammenhängende aus Nullen und Einsen bestehende Zeichenfolge auf einem mit $_$ vorbesetztem Band die Anzahl der Einsen auf gerade Parität ergänzt. Dazu wird am linken Ende der Zeichenfolge eine 0 angefügt, wenn die Anzahl der Einsen gerade ist und eine 1, wenn die Anzahl der Einsen ungerade ist. Der Schreib-/Lesekopf soll vor der Operation rechts neben der Zeichenfolge stehen. Beispiel: aus $______10101______$ wird also $______110101______$ und aus $______1001______$ wird $______01001______$.

Lösung

Strategie:

- In Zustand 1 rechts neben dem String starten. In Zustand 1 nach links gehen, solange $_$ gelesen wird. Wird in Zustand 1 eine 0 gelesen, nach Zustand 3 gehen. (Erstes Stringzeichen ist 0) Wird in Zustand 1 eine 1 gelesen, nach Zustand 2 gehen. (Erstes Stringzeichen ist 1)
- In Zustand 2 solange nach links gehen, wie 0en gelesen werden. Wird in Zustand 2 eine 1 gelesen, nach Zustand 3 gehen. Wird in Zustand 2 ein $_$ gelesen, ist das Stringende erreicht, eine 1 schreiben, HALT.
- In Zustand 3 solange nach links gehen, wie 0en gelesen werden. Wird in Zustand 3 eine 1 gelesen, nach Zustand 2 gehen. Wird in Zustand 3 ein $_$ gelesen, ist das Stringende erreicht, eine 0 schreiben, HALT. Ist die Turing-Maschine in Zustand 2, so ist die aktuelle Anzahl der 1en ungerade, ist sie in Zustand 3, so ist die Anzahl der 1en gerade.

$$1 \begin{cases} _ / _ L 1 \\ 0 / 0 L 3 \\ 1 / 1 L 2 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} _ / 1 L \text{ HALT} \\ 0 / 0 L 2 \\ 1 / 1 L 3 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} _ / 0 L \text{ HALT} \\ 0 / 0 L 3 \\ 1 / 1 L 2 \end{cases}$$



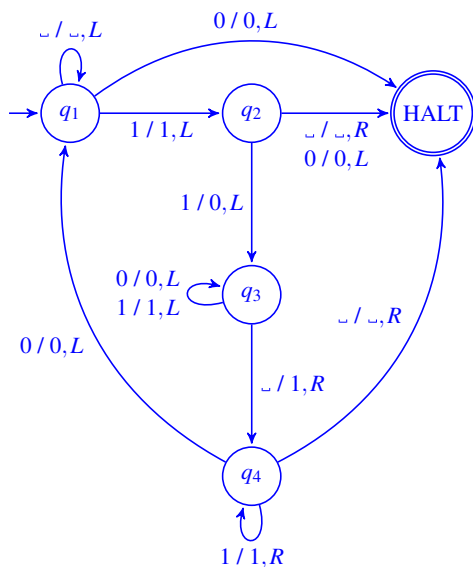
A 10.11 (L3) Konstruieren Sie eine Turing-Maschine mit den Bandzeichen $\Gamma = \{_, 0, 1\}$, die in einer zusammenhängenden Gruppe von Einsen auf einem mit Blank vorbesetzten Band zwischen je zwei Einsen eine Null einfügt. Zu Beginn soll der Schreib-/Lesekopf rechts von der Einserguppe stehen. Beispiel: aus $____11111______$ wird also $____101010101______$.

Lösung

Strategie:

1. In Zustand 1 rechts neben dem String starten. In Zustand 1 nach links gehen, bis zur ersten 1, also zum Stringanfang. Wurde die erste 1 gelesen, nach Zustand 2 gehen.
2. In Zustand 2 einen Schritt nach links gehen. Wird dort eine 1 gelesen, diese durch 0 ersetzen und nach Zustand 3 gehen. Wird ein $_$ oder eine 0 gelesen, HALT.
3. In Zustand 3 solange nach links gehen, bis ein $_$ gelesen wird. Den $_$ am Stringende durch eine 1 ersetzen und nach Zustand 4 gehen.
4. In Zustand 4 nach rechts gehen bis eine 0 gelesen wird. Jetzt weiter bei Punkt 1 in Zustand 1.

$$1 \begin{cases} _ _ L & 1 \\ 0 0 L & \text{HALT} \\ 1 1 L & 2 \end{cases} \quad 2 \begin{cases} _ _ R & \text{HALT} \\ 0 0 L & \text{HALT} \\ 1 0 L & 3 \end{cases} \quad 3 \begin{cases} _ 1 R & 4 \\ 0 0 L & 3 \\ 1 1 L & 3 \end{cases} \quad 4 \begin{cases} _ _ R & \text{HALT} \\ 0 0 L & 1 \\ 1 1 R & 4 \end{cases}$$



Übungsaufgaben zu Kapitel 10.2

A 10.12 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Wie kann man endliche von zyklischen Sackgassen unterscheiden?
- Was ist ein Palindrom?
- Was versteht man unter einer kontextfreien Sprache?
- Was ist das Wortproblem?

Lösung

- Kommt man bei der Analyse eines Wortes nach endlich vielen Schritten zu einem Wort, auf das keine Produktionen mehr angewendet werden können, so ist man in eine endliche Sackgasse geraten. Man kann dann die Analyse bei einer vorangehenden Verzweigungsmöglichkeit wieder aufnehmen. Bei einer zyklischen Sackgasse führt die Analyse nach einer endlichen Anzahl von Schritten wieder auf ein Wort, das in einem früheren Schritt bereits aufgetreten ist. Man kann die Sackgasse erkennen und wieder verlassen, wenn man alle Analyseschritte zwischenspeichert und immer wieder mit dem aktuellen Schritt vergleicht.
- Unter einem Palindrom versteht man ein um seinen Mittelpunkt symmetrisches Wort. Es ist also vorwärts und rückwärts gelesen identisch. Beispiel: otto.
- Eine *Grammatik* heißt Chomsky-2-Grammatik oder kontextfreie Grammatik wenn die Produktionen nicht von einem Kontext abhängen. Alle Produktionen haben dann die Form:

$$A \rightarrow u \quad \text{mit } A \in V, u \in (V \cup \Sigma)^+ .$$

Die Menge der durch kontextfreie Grammatiken erzeugten Sprachen ist mit der Menge der durch nichtdeterministische Kellerautomaten akzeptierten Sprachen identisch.

Eine *Sprache* L ist kontextfrei, wenn eine kontextfreie Grammatik existiert, die die Sprache L erzeugt.

- Unter dem Wortproblem versteht man die Aufgabe, von einem gegebenen Wort zu entscheiden, ob es zu einer bestimmten Sprache gehört oder nicht. Es kann sich dabei beispielsweise um die von einer formalen Grammatik erzeugte Sprache oder um die akzeptierte Sprache eines Automaten handeln.

A 10.13 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was versteht man unter dem Nachbereich einer formalen Sprache?
- Unter welcher Bedingung heißt eine Produktion terminal?
- Was versteht man unter dem Kern einer formalen Sprache?
- Welche Klasse von formalen Sprachen der Chomsky-Hierarchie lässt sich durch endliche Automaten darstellen?
- Welcher Typ von formalen Sprachen ist zu nichtdeterministischen Kellerautomaten äquivalent?

Lösung

- Als *Nachbereich* bezeichnet man alle überhaupt aus dem Startsymbol S ableitbaren Wörter aus $(V \cup \Sigma)^*$. Er umfasst also auch Wörter, die nicht zur von der Grammatik G erzeugten Sprache $L(G)$ gehören.
- Eine Produktion wird als *terminal* bezeichnet, wenn das Ergebnis nur aus terminalen Zeichen besteht, also:

$$A \rightarrow u \quad \text{mit } A \in V, u \in \Sigma^+ .$$

- c) Die Gesamtheit aller in den Ableitungen der Wörter der Sprache vorkommenden Wörter aus $(V \cup \Sigma)^*$ bilden den *Kern* K der formalen Sprache. Offenbar gilt $L(G) = K \cap \Sigma^*$.
Zusätzlich zur Sprache umfasst der Kern also auch Worte, in denen auch syntaktische Variablen (Nicht-terminalsymbole) enthalten sind.
- d) Reguläre Sprachen (Typ 3), also solche mit terminalen und linkslinearen oder rechtslinearen Produktionen, lassen sich durch endliche Automaten darstellen.
- e) Kontextfreie Sprachen, also durch Chomsky-2-Grammatiken erzeugte, sind zur akzeptierten Sprache von nichtdeterministischen Kellerautomaten äquivalent.

A 10.14 (L3) Gegeben sei die folgende formale Sprache:
 $\Sigma = \{u, v, w\}$, $V = \{S, X\}$, $P = \{S \rightarrow uSv \mid X, X \rightarrow vXu \mid v \mid w\}$

- Von welchem Typ ist die Grammatik?
- Geben Sie die zugehörige Sprache an.
- Leiten Sie das Wort uv^2wu^2v ab. Falls es bei der Ableitung Sackgassen gibt, geben Sie bitte ein Beispiel an.

Lösung

- Die Grammatik ist wortlängenmonoton, da keine Produktion verkürzend wirkt. Sie ist außerdem kontextfrei und daher vom Typ Chomsky-2. Da es nichtlineare Produktionen gibt, ist die Grammatik nicht vom Typ Chomsky-3.
- Die zugehörige Sprache lautet: $L = \{u^n v^m x u^m v^n \mid n, m \in \mathbb{N}_0, x \in \{v, w\}\}$.
Die kürzesten Wörter sind: v, w, uvv, uvv .
- $S \Rightarrow uSv \Rightarrow uvXuv \Rightarrow uvvXuuv = uv^2wu^2v$.
Es gibt bei der Ableitung von Wörtern (also vorwärts ausgehend vom Startsymbol) keine Sackgassen.

A 10.15 (L3) Konstruieren Sie eine Formale Sprache L für die Menge aller korrekten arithmetischen Ausdrücke mit natürlichen Zahlen n unter Verwendung der üblichen Klammerung mit den Operationen „+“ und „.“.

Lösung

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, \cdot, (,)\}$,

$V = \{S, N, T\}$,

$P = \{S \rightarrow T, T \rightarrow T + T, T \rightarrow T \cdot T, T \rightarrow (T), T \rightarrow N, N \rightarrow NN, N \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9\}$.

Anmerkung: Die beiden Operationen Multiplikation und Addition sind hier gleichberechtigt, „Punkt vor Strich“ wird also nicht beachtet. Zum Erzeugen von arithmetischen Ausdrücken ist dies auch nicht erforderlich; für eine Analyse in einem Compiler allerdings schon, hierfür müsste die Grammatik angepasst werden.

A 10.16 (L3) Die Zusammenstellung eines Intercity-Zuges möge nach folgenden Regeln erfolgen: Der erste Wagen des Zugs ist ein Triebwagen, es folgen $n > 1$ Wagen der ersten Klasse, danach folgt ein Speisewagen und danach $2n$ Wagen der zweiten Klasse, am Ende folgt ein Fahrradwagen.

- Geben Sie die Wagenfolge des kürzestmöglichen Zuges an.
- Konstruieren Sie eine formale Sprache für die Zusammenstellung von Intercity-Zügen. Verwenden Sie dazu die Menge $\Sigma = \{t, 1, s, 2\}$ von terminalen Zeichen in ihrer offensichtlichen Bedeutung sowie die Menge $V = \{S, W\}$ von syntaktischen Variablen, wobei W für „Wagen“ steht.
- Von welchem Chomsky-Typ ist die von Ihnen definierte Grammatik? Von welchem die Sprache? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
- Wie muss man die Regeln für die Zugzusammenstellung ändern, damit die entsprechende formale Sprache als endlicher Automat darstellbar ist?

Lösung

- Die Wagenfolge des kürzestmöglichen Zuges lautet: $t1s22$.
- $\Sigma = \{t, 1, s, 2\}$,
 $V = \{S, W\}$,
 $P = \{S \rightarrow tW, W \rightarrow 1s22, W \rightarrow 1W22\}$.

- Nicht alle verwendeten Produktionen sind terminal oder rechts-/linkslinear, daher ist die Grammatik nicht regulär (Typ 3). Die Grammatik ist wortlängenmonoton und kontextfrei und daher vom Typ 2.

Die Sprache ist daher ebenfalls mindestens Typ 2, könnte aber auch Typ 3 sein. Voraussetzung wäre, dass man eine äquivalente Typ 3 Grammatik angeben könnte. Dies ist hier nicht möglich (siehe dazu auch die folgende Aufgabe). Ein Beweis kann durch das Pumping Theorem erfolgen.

- Endliche Automaten akzeptieren Typ 3 (reguläre) Sprachen. Da die Sprache hier Typ 2 ist, kann sie nicht als endlicher Automat modelliert werden.

Problematisch ist, dass die Anzahl der Wagen zweiter Klasse doppelt so hoch sein soll wie die der ersten Klasse und dass die Anzahl der Wagen nicht beschränkt ist. Beschränkt man die maximale Anzahl der Wagen, so ist eine Darstellung als endlicher Automat möglich.

Auch ohne Beschränkung gelingt dies, wenn die Anzahl der Wagen erster Klasse unabhängig von der Anzahl der Wagen zweiter Klasse ist.

Man kann zwar eine Mengen von Produktionen finden, bei der alle Produktionen terminal oder linear sind, beispielsweise

$$P = \{S \rightarrow tW, W \rightarrow 1s22, W \rightarrow V22, V \rightarrow 1W\}.$$

Es treten jedoch linkslineare *und* rechtslineare Produktionen gleichzeitig auf, so dass die resultierende Grammatik nicht regulär ist.

Man könnte die Aufgabe jedoch ohne weiteres mit Hilfe eines Kellerautomaten lösen.

11 Lösungen zu Kapitel 11 – Algorithmen – Berechenbarkeit und Komplexität

Übungsaufgaben zu Kapitel 11

A 11.1 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Wann ist ein Algorithmus statisch finit und wann dynamisch finit?
- Erläutern Sie den Unterschied zwischen Berechenbarkeit und Komplexität.
- Was besagt die Church-Turing-These?
- Was ist der Unterschied zwischen primitiv-rekursiven und μ -rekursiven Funktionen?
- Was sind NP-vollständige Probleme?
- Wann ist ein Algorithmus effektiv, wann effizient?

Lösung

- Ein Algorithmus muss immer statisch finit und dynamisch finit sein.
statisch finit: Es gibt nur eine endliche Anzahl an Aktionen, die man in einem Algorithmus ausführen kann. Statisch bedeutet hier, dass der Algorithmus nicht laufen muss, um dies zu prüfen.
dynamisch finit: Ressourcen (Speicher, Rechenzeit) sind endlich, daher muss ein Algorithmus mit endlichen Ressourcen auskommen.
- Im Grunde hat das eine mit dem anderen nicht wirklich etwas zu tun.
Berechenbarkeit: Hier geht es um die Frage, ob ein Problem grundsätzlich berechenbar, also als Algorithmus formulierbar ist. Nur wenn dies der Fall ist, kann man das Problem auf einem Computer überhaupt lösen.
Komplexität: Für berechenbare Probleme ist die Zeit- oder Speicherkomplexität interessant. Eine zentrale Aufgabe der Informatik im Zusammenhang mit der Komplexitätstheorie ist es, nicht nur irgendeinen Algorithmus zur Lösung eines Problems zu finden, sondern einen möglichst effizienten, wobei man die Effizienz vor allem an der benötigten Ausführungszeit und am Speicherbedarf misst.
Die Komplexitätstheorie stellt Mittel bereit, um solche Untersuchungen unabhängig von konkreter Hardware nur anhand der Algorithmen durchzuführen.
- siehe Buch, Kap. 11.1.1, S. 418
- Bei den μ -rekursiven Funktionen wird zusätzlich noch der μ -Operator eingeführt (siehe Buch, Kap. 11.1.5, S. 426). Sie sind identisch mit den WHILE-berechenbaren Funktionen, und damit nach der Church-Turing These mit dem Berechenbarkeitsbegriff überhaupt.
Die primitiv rekursiven Funktionen sind eine echte Untermenge, äquivalent zu den LOOP-berechenbaren Funktionen.
- siehe Buch, Kap. 11.2.4, S. 441.

- f) Effektivität bedeutet nur, dass einzelne Anweisungen grundlegend genug sind, so dass sie prinzipiell exakt und in endlicher Zeit ausgeführt werden können. Davon abzugrenzen ist die *Effizienz* bzgl. Zeit und Speicherplatz, die praktisch natürlich eine Rolle spielt, aber keine grundlegende Anforderung für einen Algorithmus ist.

Ein Problem heißt *effizient lösbar*, wenn es einen Algorithmus mit Zeitkomplexität $\mathcal{O}(p(n))$ gibt, wobei $p(n)$ ein Polynom beliebigen Grades ist, der Algorithmus hat polynomielle Laufzeit. Das Problem liegt dann in der Komplexitätsklasse P.

A 11.2 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was ist eine rekursive Relation?
- Was sind probabilistische Algorithmen?
- Erläutern Sie das Prinzip des Backtracking.
- Erläutern Sie das Prinzip Teile und Herrsche.

Lösung

- Rekursion = eine Funktion/Relation ist dadurch definiert, dass sie sich selbst mit anderen Parametern direkt oder indirekt aufruft.
- siehe Buch, Kap. 11.3, S. 448.
- siehe Buch, Kap. 11.4.3, S. 464.
- siehe Buch, Kap. 11.2.2, S. 437.

A 11.3 (M3) Zur Ackermannfunktion $A(x, y)$:

- Wie ist die Ackermannfunktion definiert?
- Ist die Ackermannfunktion primitiv-rekursiv?
- Berechnen Sie $A(3, 2)$.
- Für welches $x \in \mathbb{N}$ gilt $A(3, A(0, y)) = A(x, A(3, y))$?
- Zeigen Sie: $A(p, q + 1) > A(p, q)$.

Lösung

- a) Die Ackermannfunktion $A(x, y)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}A(0, y) &= y + 1, \\A(x + 1, 0) &= A(x, 1), \\A(x + 1, y + 1) &= A(x, A(x + 1, y)).\end{aligned}$$

- b) Nein. Die Ackermann-Funktion ist keine primitiv-rekursive Funktion, sondern eine μ -rekursive Funktion, da man zeigen kann, dass sie schneller wächst als jede primitiv rekursive Funktion.

Man kann auch als Begründung angeben, dass man bei der iterativen Programmierung der Ackermann-Funktion nicht mit einer klassischen FOR-Schleife auskommt. Man benötigt eine GOTO- oder eine WHILE-Schleife.

c) In Folgenden wird statt $A(a,b)$ vereinfachend (a,b) geschrieben. Nach dem Aufschreiben der ersten Terme erkennt man das Bildungsgesetz, so dass sich die Lösung schnell finden lässt. Siehe auch die folgende Teilaufgabe.

$$\begin{aligned}
(3,2) &= (2,(3,1)) = (2,(2,(3,0))) = (2,(2,(2,1))) = \\
&(2,(2,(1,(2,0)))) = (2,(2,(1,(1,1)))) = (2,(2,(1,(0,(1,0)))) = \\
&(2,(2,(1,(0,(0,1)))) = (2,(2,(1,(0,2)))) = (2,(2,(1,3))) = \\
&(2,(2,(0,(1,2)))) = (2,(2,(0,(0,(1,1)))) = (2,(2,(0,(0,(0,(1,0)))) = \\
&(2,(2,(0,(0,(0,2)))) = (2,(2,(0,(0,3)))) = (2,(2,(0,4))) = (2,(2,5)) = \\
&(2,(1,(2,4))) = (2,(1,(1,(2,3)))) = (2,(1,(1,(1,(2,2)))) = (2,(1,(1,(1,(1,(2,1)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(1,(2,0)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(1,(1,1)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(1,0)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,1)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(1,(0,2)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(1,3)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(0,(1,2)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(1,1)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(1,0)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(0,1)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(0,2)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(0,(0,3)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,(0,4)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(1,5)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(1,4)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(1,3)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(1,2)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(0,(1,1)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(0,(0,(1,0)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(0,(0,(0,1)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(0,(0,2)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(0,3)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,(0,4)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,(0,5)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,(0,6)))) = \\
&(2,(1,(1,(1,7))) = \\
&(2,(1,(1,(0,(1,6)))) =
\end{aligned}$$

...
 (2,(1,(1,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(1,0)))))))))) =
 (2,(1,(1,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,1)))))))))) =
 ...
 (2,(1,(1,(0,8)))) =
 (2,(1,(1,9))) =
 (2,(1,(0,(1,8)))) =
 ...
 (2,(1,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(1,0)))))))))) =
 (2,(1,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,1)))))))))) =
 ...
 (2,(1,(0,10))) =
 (2,(1,11)) =
 (2,(0,(1,10))) =
 ...
 (2,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(1,0)))))))))) =
 (2,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,(0,1)))))))))) =
 ...

$$\begin{aligned}
(2,(0,12)) &= \\
(2,13) &= \\
(1,(2,12)) &= \\
(1,(1,(2,11))) &= \\
(1,(1,(1,(2,10)))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(2,9)))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(2,8)))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,7))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,6)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,5)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,4)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,3)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,2)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,1)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(2,0)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,1)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(1,0)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,1)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,2)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,3)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(1,2)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(1,1)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(1,0)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(0,(0,1)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,(0,2)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,3)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(0,(0,4)))))))) &= \\
(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,(1,5)))))))) &=
\end{aligned}$$

A 11.5 (M2) Der übliche Algorithmus zur Multiplikation zweier $n \times n$ -Matrizen hat die Komplexität $\mathcal{O}(n^3)$. Nach dem Verfahren von Strassen lassen sich zwei $n \times n$ -Matrizen mit der Komplexität $\mathcal{O}(n^{\text{ld}7})$ multiplizieren. Für $n = 10$ benötige der übliche Algorithmus auf einem bestimmten Rechner 0,1 Sekunden und der Strassen-Algorithmus 0,12 Sekunden.

- Um wie viele Sekunden arbeitet der Strassen-Algorithmus schneller als der übliche Algorithmus, wenn $n = 100$ ist?
- Wie groß muss n sein, damit der Strassen-Algorithmus auf dem gegebenen Rechner doppelt so schnell abläuft wie der konventionelle Algorithmus?

Lösung

- a) konventioneller Algorithmus:

$T_M(n) = c_M \cdot n^3$ (dies ist bereits eine Vereinfachung, da alle Terme kleiner dritten Grades vernachlässigt werden).

$$T_M(10) = c_M \cdot 10^3 s = 0,1s, \text{ also } c_M = 0,1/1000 = 10^{-4}.$$

$$T_M(100) = 10^{-4} \cdot 100^3 s = 100s.$$

Strassen-Algorithmus:

$$T_S = c_S \cdot n^{\text{ld}7} = c_S \cdot n^{2,807}$$

$$T_S(10) = c_S \cdot 10^{2,807} s = 0,12s, \text{ also } c_S \approx 0,12/641,21 \approx 1,87 \cdot 10^{-4}.$$

$$T_S(100) = 1,87 \cdot 10^{-4} \cdot 100^{2,807} s \approx 1,87 \cdot 10^{-4} \cdot 4,1115 \cdot 10^5 s \approx 76,9s.$$

$$\text{Differenz: } D = T_M(100) - T_S(100) = (100 - 76,9)s = 23,1s.$$

Für $n = 100$ arbeitet der Strassen-Algorithmus also um 23,1 sec schneller als der konventionelle Algorithmus.

- b) $c_M \cdot n^3 = 2 \cdot c_S n^{2,807}$

$$n^{3-2,807} = n^{0,193} = 2 \cdot c_S / c_M = 2 \cdot 1,87 \cdot 10^{-4} / 10^{-4} = 3,74$$

$$n = 3,74^{1/0,193} \approx 3,74^{5,1813} \approx 929.$$

Erst für $n = 929$ arbeitet der Strassen-Algorithmus doppelt so schnell wie der konventionelle Algorithmus.

12 Lösungen zu Kapitel 12 – Suchen und Sortieren

Übungsaufgaben zu Kapitel 12

A 12.1 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Ist Suchen in Arrays oder in linearen Listen effizienter durchführbar?
- Was versteht man unter Radix-Suche?
- Wodurch unterscheiden sich die sequentielle und die binäre Suche?

Lösung

- In Arrays ist eine Suche effizienter. Bei einer linearen Liste muss man sich immer vom Start (oder Ende) der Liste von einem Element zum nächsten „hangeln“, während bei Arrays ein direkter Zugriff möglich ist.
- siehe Buch, Kap. 12.1.4, S. 473
- Für eine binäre Suche müssen die Daten sortiert sein, für eine sequentielle nicht. Die binäre Suche ist dann erheblich effizienter.

A 12.2 (P3) Vergleich von binärer Suche und Interpolationssuche:

- Erstellen Sie ein Array `a[]` mit 30.000 Integer-Zufallszahlen. Verwenden Sie dabei die Uhrzeit als Startwert für den Zufallszahlengenerator.
- Ordnen Sie das Array in aufsteigender Folge mit einer beliebigen Sortierfunktion.
- Schreiben Sie eine Funktion `search_bin` zum binären Suchen. Suchen Sie damit in einer eine Million mal durchlaufenen Schleife nach zufällig ausgewählten Zahlen und geben Sie die mittlere Anzahl der Intervallteilungen sowie die mittlere Ausführungszeit aus.
- Schreiben Sie eine Funktion `search_int` zur Interpolationssuche. Suchen Sie damit in einer ebenfalls eine Million mal durchlaufenen Schleife nach denselben Zufallszahlen wie mit der binären Suche und geben Sie auch dafür die mittlere Anzahl der Intervallteilungen sowie die benötigte Ausführungszeit aus. Warnung: es ist auf effiziente Implementierung und auf Rundungsfehler bei der Intervallteilung zu achten.
- Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse für die binäre Suche und die Interpolationssuche.

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 12.3 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was ist der wesentliche Vorteil von Hash-Verfahren?
- Was versteht man unter Klumpenbildung?
- Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil der quadratischen im Vergleich zur linearen Kollisionsauflösung.

- d) Welche Forderungen stellt man üblicherweise an Hash-Funktionen?
- e) Wie ist der Belegungsfaktor definiert?
- f) Kann der Belegungsfaktor größer als eins werden?

Lösung

- a) Rascher Zugriff auf die Datensätze mit wenig Schlüsselvergleichen auch bei großen Datenmengen.
- b) Wenn durch die Kollisionsauflösung Häufungen von Einträgen im Adressraum entstehen, spricht man von Klumpenbildung. Die lineare Kollisionsauflösung neigt zur Klumpenbildung. Der Nachteil ist, dass in Klumpen eine erhöhte Anzahl von Schlüsselvergleichen erforderlich ist.
- c) Die quadratische Kollisionsauflösung verteilt die Einträge gleichmäßiger über den Adressraum, die Klumpenbildung ist also geringer. Die Größe des Adressraums muss eine Primzahl sein, aber auch dann wird von einer bestimmten Primäradresse ausgehend nur die Hälfte des Adressraums erfasst.
- d)
 - Die Hash-Funktion soll schnell aus dem Primärschlüssel berechnet werden können.
 - Eine bestehende Ordnung der Primärschlüssel soll erhalten bleiben.
 - Die Hash-Funktion soll die Adressen gleichmäßig über die m möglichen Adressen verteilen.
 - Alle Schlüssel sollen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.
 - Die durch die Kollisionsbehandlung berechneten Adressen sollen gleichmäßig über den Adressraum verteilt werden.
- e) Der Belegungsfaktor lautet $\mu = n/m$, wobei n die Anzahl der gespeicherten Datensätze ist und m der Umfang des Adressraums.
- f) Der Belegungsfaktor kann größer als 1 werden, wenn die Anzahl der gespeicherten Datensätze die Größe des Adressraums übersteigt. Dies kann dann der Fall sein, wenn der Adressraum nur für die Primäradressen gilt, der Speicherplatz für die Kollisionsauflösung aber durch dynamische Speicherplatzzuweisung erfolgt, beispielsweise bei Kollisionsauflösung durch lineare Listen.

A 12.4 (M1) Berechnen Sie die mittlere Anzahl S von Vergleichen zum Auffinden eines beliebigen Datensatzes in einer Hash-Tabelle, die maximal 100.000 Datensätze enthalten kann und bereits mit 86.000 Datensätzen gefüllt ist. Dabei kann von idealen Bedingungen ausgegangen werden.

Lösung

Für ideale Verhältnisse gilt (siehe Gleichung (12.31) Buch S. 488):

$$S(\mu) = \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{1-\mu}$$

Mit $\mu = n/m = 86000/100000 = 0,86$ folgt: $S = 1,16279 \cdot \ln 7,14286 = 2,28618$. Es sind also im Mittel etwas mehr als zwei Vergleiche erforderlich.

A 12.5 (M3) Es soll eine Hash-Tabelle mit einem Adressraum von $m = 13$ angelegt werden. Die Hash-Funktion sei definiert durch die Vorschrift:

$$h(\text{Name}) = (\text{pos}(1. \text{ Buchstabe}) + \text{pos}(2. \text{ Buchstabe})) \bmod 13.$$

Dabei gibt $\text{pos}()$ die Position des betreffenden Buchstaben im Alphabet an, also $\text{pos}(A) = 1$ etc.

- a) Tragen Sie die folgenden Datensätze in der angegebenen Reihenfolge unter Verwendung der linearen und der quadratischen Kollisionsauflösung in die Hash-Tabelle ein: Hammer, Feile, Nagel, Zange, Zwinge, Raspel, Schraube, Niete, Pinsel.

b) Geben Sie den Belegungsfaktor an.

c) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der Vergleiche für erfolgreiche und erfolglose Suche.

Lösung

a) Berechnung des Hashwerts:

Name	Hammer	Feile	Nagel	Zange	Zwinge	Raspel	Schraube	Niete	Pinsel
Pos	8 + 1	6 + 5	14 + 1	26 + 1	26 + 23	18 + 1	19 + 3	14 + 9	16 + 9
$h(\text{Name})$	9	11	2	1	10	6	9	10	12

Hash-Tabelle:

Hash-Adresse	Name (linear)	Name (quadratisch)
0	Niete	Schraube
1	Zange	Zange
2	Nagel	Nagel
3	Pinsel	–
4	–	–
5	–	–
6	Raspel	Raspel
7	–	Niete
8	–	–
9	Hammer	Hammer
10	Zwinge	Zwinge
11	Feile	Feile
12	Schraube	Pinsel

b) Belegungsfaktor: $\mu = n/m$, wobei n die Anzahl der gespeicherten Datensätze ist und m der Umfang des Adressraums. Hier: $\mu = 9/13 \approx 0,692$.

Es ist $n = 9$, da die 9 Datensätze aus Aufgabe (b) eingetragen werden sollen.

c) linear

Anzahl Vergleiche bei erfolgreicher Suche:

$$S_l = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 5)/9 = 19/9 \approx 2,11$$

Anzahl Vergleiche bei erfolgloser Suche:

$$U_l = (5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 9 + 8 + 7 + 6)/13 = 50/13 \approx 3,85$$

quadratisch Anzahl Vergleiche bei erfolgreicher Suche:

$$S_q = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 7 + 1)/9 = 17/9 \approx 1,89$$

Anzahl Vergleiche bei erfolgloser Suche:

$$U_q = (3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 6 + 2 + 1 + 4 + 13)/13 = 37/13 \approx 2,85$$

Der letzte Fall (die 13) ist hier interessant: Will man in die Tabelle noch ein weiteres Element mit Index 12 und quadratischer Kollisionsauflösung eintragen, so stellt man fest, dass dies nicht möglich ist, weil man in einen Zyklus läuft. Die Tabelle ist in diesem Fall also praktisch voll, obwohl eigentlich Elemente frei sind.

Es genügt bei der quadratischen Kollisionsauflösung den Zähler i bis maximal $n - 1 = 12$ laufen zu lassen. Hat man bis zu diesem Punkt keinen freien Platz gefunden, so ist ein Eintrag in die Tabelle nicht möglich.

A 12.6 (P4) Es soll eine Datenverwaltung unter Verwendung der gestreuten Speicherung aufgebaut werden. Die Primäradresse A soll dabei möglichst einfach unter Einhaltung der lexikografischen Ordnung aus dem Primärschlüssel der Datensätze berechnet werden. Die Kollisionsbehandlung soll mithilfe einfach verketteter nach dem Primärschlüssel geordneter linearer Listen erfolgen. Es sollen die Operationen Einfügen, Suchen, Löschen und Auflisten von Datensätzen realisiert werden.

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 12.7 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- a) Welches direkte Sortierverfahren benötigt im Mittel am wenigsten Schlüsselvergleiche?
- b) Welches direkte Sortierverfahren benötigt im Mittel am wenigsten Zuweisungen?
- c) Welches direkte Sortierverfahren arbeitet für bereits sortierte Daten am schnellsten?

Lösung

- a) Insertion Sort mit binärem Einfügen
- b) Selection Sort
- c) Abgesehen von Selection Sort ist es egal, welches verwendet wird, alle benötigen die kleinstmögliche Anzahl von n Vergleichen bei n Daten. Betrachtet man noch die Anzahl an Zuweisungen, so ist Bubblesort am schnellsten.

A 12.8 (P2) Implementieren Sie die Sortierverfahren direktes Einfügen, direktes binäres Einfügen, direktes Auswählen, Bubblesort und Shakersort. Erzeugen Sie Zufallsfolgen von double-Zahlen, sortieren Sie diese mit allen implementierten Sortierfunktionen und geben Sie die Sie jeweiligen die Laufzeiten aus.

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 12.9 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was bedeutet die Aussage, dass der Quicksort entarten kann?
- Welches Sortierverfahren benötigt die geringste Anzahl von Schlüsselvergleichen?
- Wodurch ist eine Partition gekennzeichnet?
- Was ist ein Median?

Lösung

- Bei Quicksort wird das zu sortierende Array in zwei Teile zerlegt. Optimal ist es, wenn beide Teile gleich groß sind. Im Extremfall kann aber eine Entartung auftreten, nämlich eine Partitionierung in zwei Zerlegungen, von denen die eine nur ein einziges Element enthält und die andere den gesamten Rest des Arrays.
- Siehe hierzu Buch, Kap. 12.5.3, S. 504.
Grundsätzlich ist hier natürlich die Frage, ob die Anzahl Schlüsselvergleiche für den besten, schlechtesten oder einen mittleren Fall betrachtet werden sollen. Die Antwort wird dann unterschiedlich ausfallen. Ist nichts darüber gesagt, wird man vom mittleren Fall ausgehen.
- Eine Partition ist eine Zerlegung einer Menge in Teilmengen, die disjunkt und nicht leer sind. Die Vereinigung aller Teilmengen muss wieder die ursprüngliche Menge ergeben (jedes Element ist also in genau einer Teilmenge enthalten).
- Den Median einer Menge erhält man, indem man zunächst die Elemente der Größe nach sortiert. Der Median ist dann das Element, das in der Mitte steht.
Bsp.: $S = \{45, 12, 8, 22, 30\}$. Sortierung ergibt: 8, 12, 22, 30, 45. Der Median ist also 22.

A 12.10 (P2) Schreiben Sie unter Verwendung der C-Funktion `qsort()` ein Programm zum Sortieren eines Feldes von Zeigern, die auf Strings deuten. Die Strings sollen dabei in absteigender Reihenfolge lexikografisch sortiert werden, also c vor b vor a etc.

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 12.11 (M2) Ein Test habe ergeben, dass in Abhängigkeit von der Anzahl n der Daten für das Sortieren von Integer-Arrays mit dem Insertionsort auf einer bestimmten Maschine $t_i = 2,8n^2 \cdot 10^{-5}$ Sekunden benötigt werden. Mit dem Quicksort benötigt man $t_q = 1,4n \cdot \ln n \cdot 10^{-4}$ Sekunden. Von welchem n ab ist der Quicksort schneller als der Insertionsort?

Lösung

$2,8n^2 \cdot 10^{-5} = 1,4n \cdot \ln n \cdot 10^{-4}$ ist nach n aufzulösen. Es folgt:

$$0,2n = \ln n \rightarrow 2^{0,2n} = n.$$

Wertetabelle:

n	$2^{0,2n}$
10	$2^2 = 4$
20	$2^4 = 16$
22	$2^{4,4} \approx 21,1$
23	$2^{4,6} \approx 24,25$

ab $n = 23$ ist der Quicksort schneller.

A 12.12 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was ist ein nicht-flüchtiger Speicher?
- Was ist sequentieller und halbsequentieller Speicherzugriff?
- Was versteht man unter der Zykluszeit im Zusammenhang mit Speicherzugriffen?
- Was bewirkt eine Defragmentierung?
- Was ist der Interleave-Faktor?

Lösung

- Man unterscheidet je nachdem, ob der Speicher seine Daten ohne Aufrechterhaltung der Betriebsspannung verliert oder nicht, als flüchtig (volatile) oder nichtflüchtig (non-volatile).
- siehe Buch, Kap. 12.6.2, S. 510.
- siehe Buch, Kap. 12.6.2, S. 510.
- Durch häufiges Löschen und erneutes Beschreiben von Daten auf einer Festplatte tritt eine mit der Zeit immer stärkere Fragmentierung ein. Dies kann schnell einen erheblichen Geschwindigkeitsverlust zur Folge haben. Durch Defragmentier-Programme können die Dateien so umgeordnet werden, dass wieder eine fortlaufende Speicherung entsteht.
- siehe Buch, Kap. 12.6.2, S. 512.

A 12.13 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Grenzen Sie die Begriffe direktes und natürliches Mischen ab.
- Um welchen Faktor könnte das Sortieren durch Mischen schneller werden, wenn man an Stelle von zwei Sequenzen jeweils vier Sequenzen mischt?
- Nennen Sie den wesentlichen Vorteil des Ein-Phasen-Mischens im Vergleich zum Zwei-Phasen-Mischen.

Lösung

- siehe Buch, Kap. 12.6.4, S. 516.
- Mit $n = \text{Anzahl Sequenzen}$ und $m = \text{Anzahl Daten}$ erhält man einen Aufwand von $m \log_n m$. Bei zwei Sequenzen also $m \log_2 m$, bei vier $m \log_4 m$.

Es gilt

$$m \log_2 m = m \frac{\ln m}{\ln 2} \quad \text{und} \quad m \log_4 m = m \frac{\ln m}{\ln 4} .$$

Da

$$m \frac{\ln m}{\ln 4} = m \frac{\ln m}{\ln 2^2} = m \frac{\ln m}{2 \ln 2} = \frac{1}{2} m \log_2 m ,$$

ist das Sortieren mit vier Sequenzen also doppelt so schnell wie das mit zwei Sequenzen.

- Vergleicht man 2-Phasen-3-Band-Mischen mit dem ausgeglichenen 1-Phasen-4-Band-Mischen, so ist ein wesentlicher Vorteil des letzteren, dass hier auch die Verteilungsphase zum Sortieren beiträgt.

A 12.14 (L2) Sortieren Sie die Daten $a = \{27, 31, 11, 42, 89, 16, 17, 14, 12, 64, 50, 61, 72, 26, 28, 32, 66, 19, 22, 83, 87, 99\}$ nach dem in Abb. 12.17, S. 516 vorgeführten Muster per Hand unter Verwendung des natürlichen Mischens mit zwei Hilfsbändern b und c .

Lösung

$a:$ 27 31 | 11 42 89 | 16 17 | 14 | 12 64 | 50 61 72 | 26 28 32 66 | 19 22 83 87 99
 $b:$ 27 31 | 16 17 | 12 64 | 26 28 32 66
 $c:$ 11 42 89 | 14 | 50 61 72 | 19 22 83 87 99

$a:$ 11 27 31 42 89 | 14 16 17 | 12 50 61 64 72 | 19 22 26 28 32 66 83 87 99
 $b:$ 11 27 31 42 89 | 12 50 61 64 72
 $c:$ 14 16 17 | 19 22 26 28 32 66 83 87 99

$a:$ 11 14 16 17 27 31 42 89 | 12 19 22 26 28 32 50 61 64 66 72 83 87 99
 $b:$ 11 14 16 17 27 31 42 89
 $c:$ 12 19 22 26 28 32 50 61 64 66 72 83 87 99

$a:$ 11 12 14 16 17 19 22 26 27 28 31 32 42 50 61 64 66 72 83 87 89 99

A 12.15 (P4) Schreiben Sie eine Funktion zum Sortieren durch Mischen eines Arrays am Platz. Es darf also kein wesentlicher zusätzlicher, von der Anzahl n der Daten abhängiger Speicherplatz verwendet werden.

Lösung

Der Mergesort arbeitet üblicherweise nicht in-place, braucht also zusätzlichen Speicher. Eine in-place Implementierung ist nicht ganz einfach; ein Beispiel findet man hier:

<https://github.com/liuxinyu95/AlgoXY/blob/algoxy/sorting/merge-sort/src/mergesort.c>

Eine Beschreibung des Verfahrens hier:

<https://sites.google.com/site/algoxy/home/elementary-algorithms.pdf>

13 Lösungen zu Kapitel 13 – Bäume und Graphen

Übungsaufgaben zu Kapitel 13.1

A 13.1 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

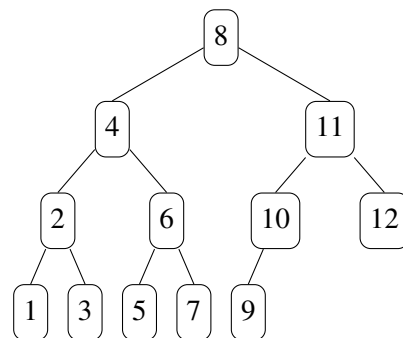
- Was ist ein Nullbaum?
- Wodurch ist ein innerer Knoten definiert?
- Was versteht man unter Preorder, Inorder und Postorder?
- Beschreiben Sie das Ordnungskriterium von binären Suchbäumen.

Lösung

- Ein Nullbaum ist ein Baum, der keine Knoten hat, also leer ist.
- In einem Binärbaum ist ein innerer (oder auch interner) Knoten einer, der genau zwei Nachfolger hat.
- siehe Buch, Kap. 13.1.2, S. 527.
- Ein Binärbaum heißt *binärer Suchbaum*, wenn für jeden Knoten k gilt, dass alle Schlüssel im linken Teilbaum von k kleiner als der Schlüssel von k sind, und dass alle Schlüssel im rechten Teilbaum von k größer (oder gleich) als der Schlüssel von k sind.

A 13.2 (L2) Gegeben sei der nebenstehende Binärbaum.

- Geben Sie die Höhe des Baumes an.
- Handelt es sich um einen erweiterten Binärbaum?
- Handelt es sich um einen vollständigen Binärbaum?
- Geben Sie die Durchsuchungslisten an:
 - Hauptreihenfolge (Preorder)
 - Nebenreihenfolge (Postorder)
 - symmetrischer Reihenfolge (Inorder)
 - Ebenenreihenfolge (Levelorder)



Lösung

- Als *Höhe* eines Binärbaums wird die Tiefe des längsten Astes des Baumes bezeichnet. Die *Tiefe* eines Knotens gibt an, wie viele Kanten er von der Wurzel aus entfernt liegt; die Wurzel hat Tiefe 0. Die Höhe des Baumes ist also 3.

- b) Für einen erweiterten Binärbaum gilt, dass jeder Knoten entweder keinen Nachfolger hat oder zwei hat. Der abgebildete Teilbaum ist also kein erweiterter Binärbaum, da der Knoten 10 nur einen Nachfolger hat.
- c) Bei einem vollständigen Binärbaum sind alle Ebenen (Niveaus) vollständig besetzt. Hier sind die Ebenen 0, 1 und 2 vollständig besetzt, die letzte Ebene 3 ist nicht vollständig besetzt. Es handelt sich also nicht um einen vollständigen Baum.
- d) Hauptreihenfolge, Preorder: Wurzel, linker Teilbaum, rechter Teilbaum
 8, 4, 2, 1, 3, 6, 5, 7, 11, 10, 9, 12
 Nebenreihenfolge, Postorder: linker TB, rechter TB, Wurzel
 1, 3, 2, 5, 7, 6, 4, 9, 10, 12, 11, 8
 Symmetrische Reihenfolge, Inorder: linker TB, Wurzel, rechter TB
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
 Ebenenreihenfolge, Levelorder: Ebenenweise von links nach rechts
 8, 4, 11, 2, 6, 10, 12, 1, 3, 5, 7, 9

A 13.3 (P2) In einem verkettet gespeicherten Binärbaum seien numerische Werte gespeichert. Schreiben Sie ein Programm zur Durchsuchung dieses Baumes in Hauptreihenfolge, das folgende Informationen ausgibt: Anzahl der besuchten Knoten, kleinster Inhalt, größter Inhalt, Mittelwert aller Inhalte der Knoten. Programmieren Sie eine rekursive und eine iterative Variante mit folgender Knotenstruktur:

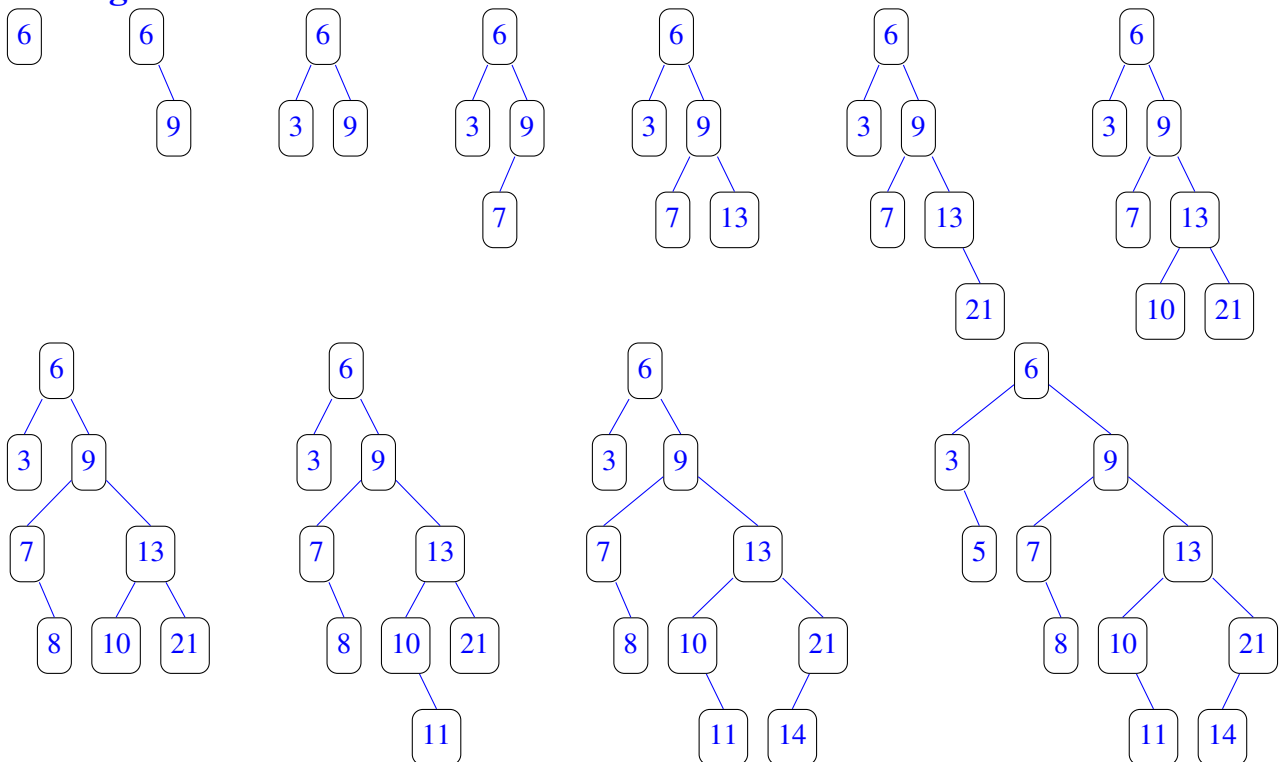
```
struct node { double value; struct node *l; struct node *r; };
```

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 13.4 (L2) Ordnen Sie die in der Reihenfolge {6, 9, 3, 7, 13, 21, 10, 8, 11, 14, 5} gegebenen Zahlen als binären Suchbaum an.

Lösung



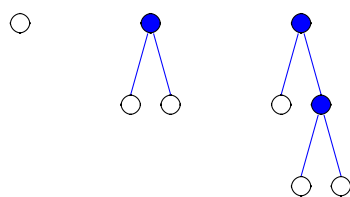
A 13.5 (P4) Schreiben Sie ein Programm zum Verwalten eines binären Suchbaums. Es sollen die Funktionen Initialisieren des Baums, Eingabe, Suchen und Löschen eines Knotens und Ausgabe der Knoteninhalte in Haupt-, Neben- und symmetrischer Reihenfolge. Verwenden Sie dabei die Knotenstruktur `struct node { int info; node *l; struct node *r; };`

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 13.6 (L2) Ein erweiterter Binärbaum ist dadurch gekennzeichnet, dass jeder Knoten entweder keinen oder zwei Nachfolger hat. Zeigen Sie: In einem erweiterten Binärbaum gilt $n_e = n_i + 1$, wobei n_e die Anzahl der Blätter ist und n_i die Anzahl der inneren Knoten.

Lösung



Die Skizze zeigt die drei kleinsten erweiterten Binärbäume, wobei die inneren Knoten als schwarze Punkte und die externen Knoten (Blätter) als leere Kreise gezeichnet sind. Für diese gilt offenbar die Behauptung $n_e = n_i + 1$. Ein erweiterter Binärbaum kann nur wachsen, indem ein Blatt durch einen aus Wurzel und zwei Blättern bestehenden Baum ersetzt wird. Es kommen also immer genau ein innerer Knoten und genau ein Blatt hinzu, so dass die Behauptung weiterhin erfüllt bleibt.

A 13.7 (P2) Schreiben Sie eine C-Funktion, die für einen verkettet gespeicherten Binärbaum die Anzahl der Knoten mit zwei Nachfolgern angibt. Die Knotenstruktur sei:

```
struct node { int info; node *l; struct node *r; };
```

Lösung

```
int nodes(struct node *w)
{
    if(w == NULL) return 0;
    if(w->l != NULL && w->r != NULL) return nodes(w->l) + nodes(w->r) + 1;
    else if(w->l != NULL && w->r == NULL) return nodes(w->l);
    else if(w->l == NULL && w->r != NULL) return nodes(w->r);
}
```

A 13.8 (P3) Schreiben Sie ein möglichst effizientes Programm, mit dem festgestellt werden kann, ob zwei lineare Listen mit jeweils n Elementen vom Typ Integer dieselben Elemente enthalten. Dabei ist nicht vorausgesetzt, dass die Elemente in den beiden Listen in derselben Reihenfolge angeordnet sind. Verwenden Sie dazu einen binären Suchbaum. Bestimmen Sie die im Mittel zu erwartende Komplexität hinsichtlich der Anzahl der Vergleiche.

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 13.9 (P2) Schreiben Sie unter Verwendung eines binären Suchbaums ein Programm, das alle doppelt vorkommenden Zahlen aus einem Array von Zufallszahlen zählt und löscht. Bestimmen Sie die Komplexität des Algorithmus hinsichtlich der Anzahl der Vergleiche.

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

A 13.10 (T2) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Was versteht man unter einem Heap?
- Warum ist für einen Heap die Speicherung in einem Array besonders geeignet?
- Warum ist ein binärer Suchbaum besser zur Verwaltung von Daten geeignet als ein Heap?
- Wofür werden Heaps hauptsächlich eingesetzt?

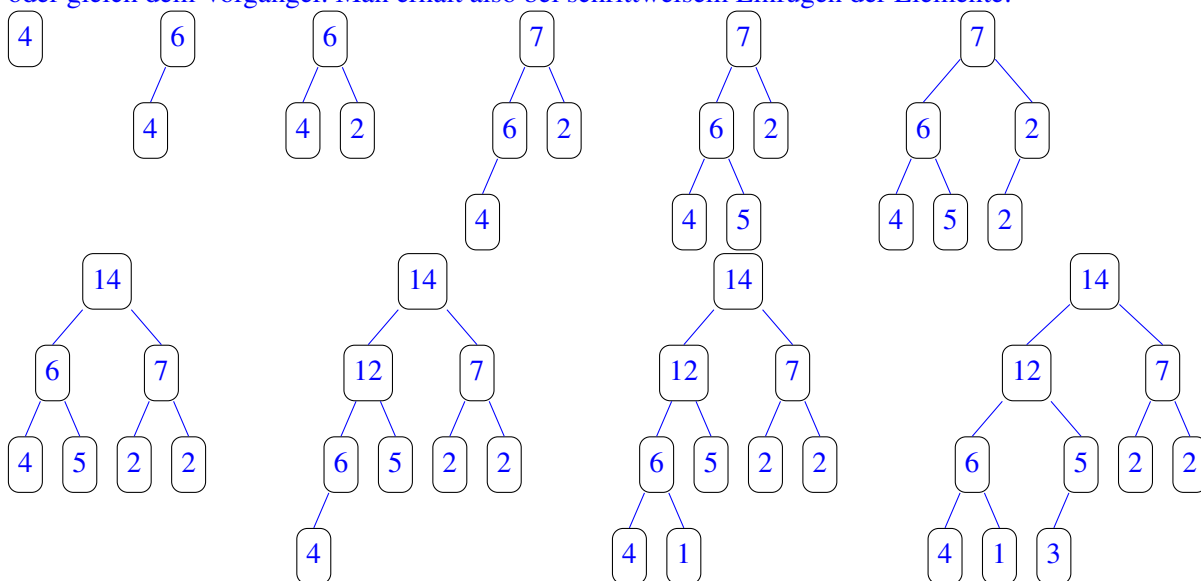
Lösung

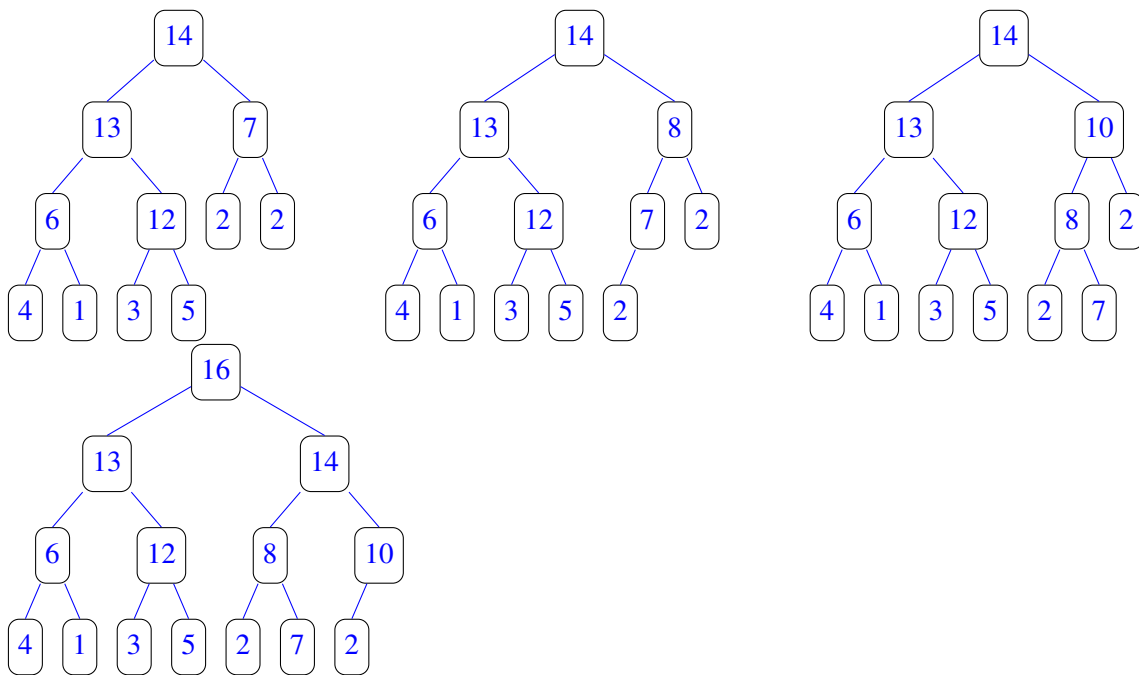
- Man unterscheidet Max-Heaps und Min-Heaps. Unter einem Max-Heap versteht man einen vollständig ausgeglichenen Binärbaum, bei dem für jeden Knoten k gilt, dass die Schlüssel aller seiner Nachfolger kleiner (oder gleich) sind als der Schlüssel von k . Für einen Min-Heap wird die Relation „kleiner“ durch die Relation „größer“ ersetzt. Spricht man nur von einem Heap, so ist ein Max-Heap gemeint.
- Da ein Heap ein vollständig ausgeglichener Binärbaum ist, entstehen bei der Speicherung in einem Array keine Lücke, so dass die Speicherplatzausnutzung optimal ist. Dadurch ist auch die Adressberechnung zur Ermittlung der Position der Nachfolger und auch des Vorgängers sehr einfach.
- In einem binären Suchbaum ist die Komplexität für das Auffinden eines Datensatzes im Mittel von der Ordnung $\mathcal{O}(\lg n)$, in einem Heap jedoch nur von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$ und damit viel langsamer.
- Die Hauptanwendungen von Heaps sind der Heap-Sort und Prioritätswarteschlangen.

A 13.11 (L2) Ordnen Sie die Schlüssel {4, 6, 2, 7, 5, 2, 14, 12, 1, 3, 13, 8, 10, 16} unter Beachtung der gegebenen Reihenfolge als Max-Heap und als Min-Heap.

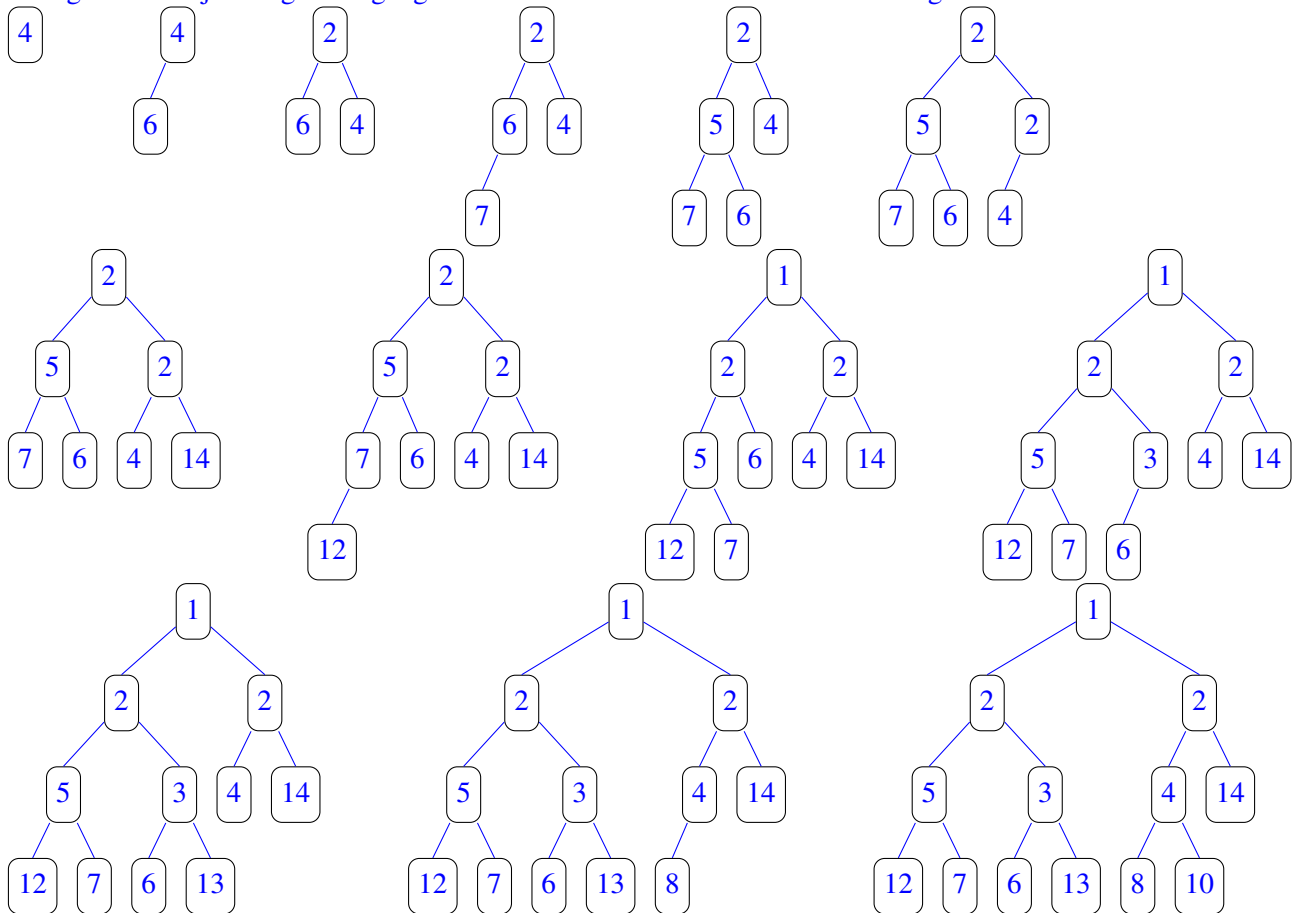
Lösung

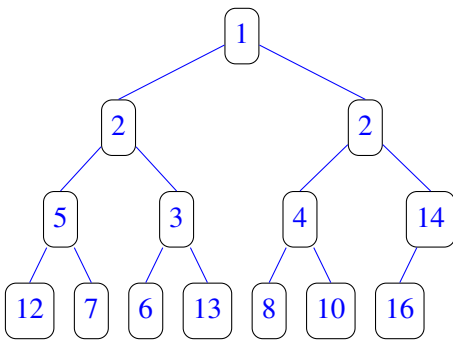
Bei der Ordnung als Max-Heap steht das größte Element in der Wurzel, alle weiteren Elemente sind kleiner oder gleich dem Vorgänger. Man erhält also bei schrittweisem Einfügen der Elemente:





Bei der Ordnung als Min-Heap steht das kleinste Element in der Wurzel, alle weiteren Elemente sind größer oder gleich dem jeweiligen Vorgänger. Man erhält also bei schrittweisem Einfügen der Elemente:

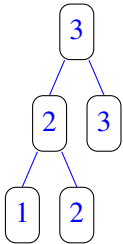




A 13.12 (L2) Geben Sie ein Beispiel für einen Max-Heap mit fünf Knoten an, der gleichzeitig ein binärer Suchbaum ist. Dabei dürfen auch identische Schlüssel zugelassen werden.

Lösung

Bei einem binären Suchbaum gilt für den Schlüssel eines jeden Knotens, dass der Schlüssel des linken Nachfolgers kleiner (oder gleich) und der Schlüssel des rechten Nachfolgers größer (oder gleich) ist. Bei einem Max-Heap gilt eine schwächere Ordnungsbeziehung. Es wird nur gefordert, dass der Schlüssel eines jeden Knotens mit Ausnahme der Wurzel kleiner (oder gleich) dem Schlüssel des Vorgängers ist. Lässt man identische Schlüssel zu, so kann man Heaps konstruieren, die gleichzeitig binäre Suchbäume sind, wie der unten stehende Baum mit fünf Knoten zeigt.



Übungsaufgaben zu Kapitel 13.2

A 13.13 (T2) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

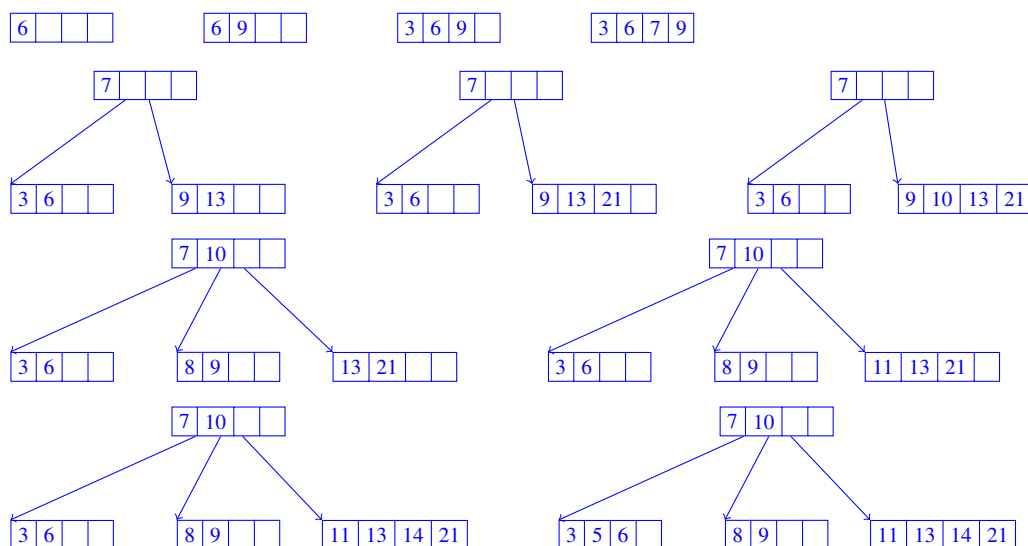
- Was ist bei Vielwegbäumen ein Bruder?
- Wodurch unterscheidet sich ein BB-Baum von einem $(2,4)$ -Baum?
- Was ist ein (a,b) -Baum?
- Was ist ein B^+ -Baum?
- Was ist eine Hecke?

Lösung

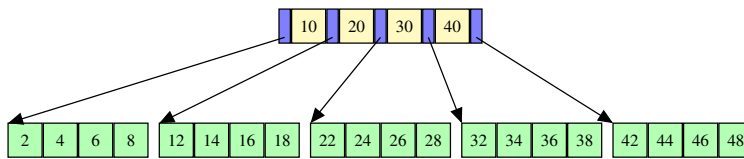
- Die auf derselben Ebene befindlichen Nachfolger eines Knotens werden *Brüder* genannt.
- Sowohl ein BB-Baum als auch ein $(2,4)$ -Baum ist ein B-Baum. Die Bezeichnung BB-Baum steht für $(1,2)$ -Baum, jede Seite umfasst daher mindestens ein Element und höchstens zwei. Ein BB-Baum mit n Elementen hat ca. die doppelte Tiefe wie ein $(2,4)$ -Baum mit derselben Anzahl von Elementen. Ein BB-Baum ist weniger für die Arbeit auf externen Speichern geeignet, sondern eher dann, wenn er komplett im Hauptspeicher gehalten werden kann.
- siehe Buch, Kap. 13.2.2, S. 551
- siehe Buch, Kap. 13.2.3, S. 554
- siehe Buch, Kap. 13.2.3, S. 554

A 13.14 (L2) Ordnen Sie die in der Reihenfolge $\{6, 9, 3, 7, 13, 21, 10, 8, 11, 14, 5\}$ gegebenen Zahlen als $(2,4)$ -Baum.

Lösung

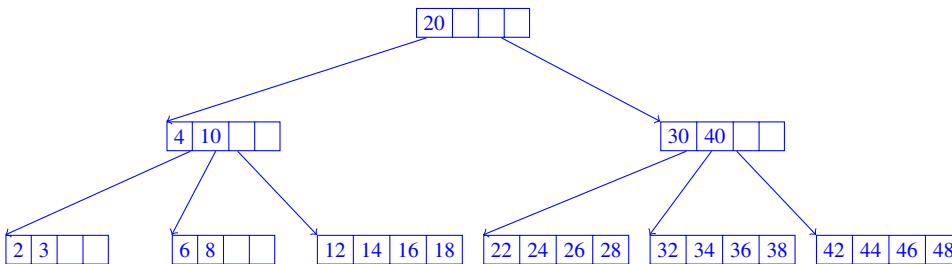


A 13.15 (L3) In den unten abgebildeten $(2,4)$ -Baum soll das Element mit Schlüssel 3 eingefügt werden. Zeichnen Sie den resultierenden Baum. Löschen Sie anschließend das Element mit dem Schlüssel 6 und zeichnen Sie den nun resultierenden Baum.

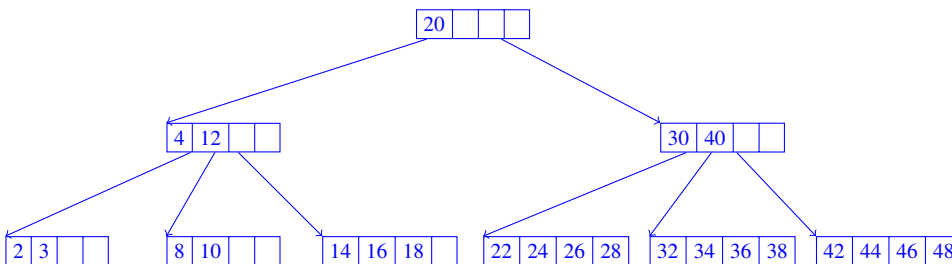


Lösung

Nach dem Einfügen von 3:



Beim Löschen von 6 tritt ein Unterlauf ein, da im Blatt dann nur noch ein einziges Element vorhanden wäre. Der resultierende Baum sieht wie folgt aus:



A 13.16 (L3) Wie viele Elemente können in einem $(2,4)$ -Baum der Höhe 2 maximal und minimal enthalten sein? Die Wurzel hat die Tiefe 0.

Lösung

Die Maximale Anzahl ergibt sich, wenn alle Seiten der drei Niveaus mit jeweils 4 Elementen voll besetzt sind. Da dann jede Seite fünf Nachfolgeseiten hat, folgt:

Niveau 0: $n_0 = 4$, Niveau 1: $n_1 = 5 \cdot 4 = 20$, Niveau 2: $n_2 = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$, Summe: $n = 124$.

Die minimale Anzahl von Elementen in einem $(2,4)$ -Baum der Höhe 2 ergibt sich, wenn die Wurzel (Niveau 0) mit nur einem Element besetzt ist. Daraus folgt dann, dass Niveau 1 aus nur zwei Seiten besteht. Diese können dann minimal mit je zwei Elementen besetzt sein, so dass jede Seite aus Niveau 1 auf je drei Seiten in Niveau 2 verweist. Die Seiten in Niveau 2 können wiederum minimal mit zwei Elementen besetzt sein. Insgesamt ergibt sich:

Niveau 0: $n_0 = 1$, Niveau 1: $n_1 = 2 \cdot 2 = 4$, Niveau 2: $n_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, Summe: $n = 17$.

A 13.17 (P4) Schreiben Sie ein Programm zum Verwalten eines $(2,4)$ -Baums. Es sollen die Funktionen Initialisieren des Baums, Eingabe, Suchen und Löschen von Einträgen und sortierte Ausgabe der Inhalte realisiert werden.

Lösung

Der Programmcode wird separat bereitgestellt.

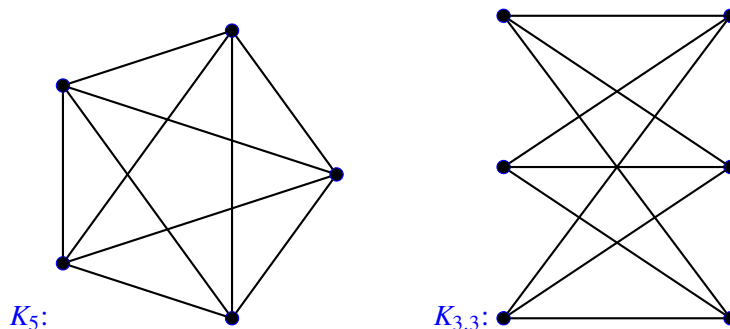
Übungsaufgaben zu Kapitel 13.3

A 13.18 (T1) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Wann ist ein Graph schlicht?
- Was ist ein Eulerscher Kreis?
- Was ist ein Hamiltonscher Kreis?
- Was ist der Grad eines Knotens?
- Was ist ein Wald?
- Was ist ein Kuratowski-Graph?

Lösung

- Ein Graph heißt *schlicht*, wenn er keine Schlingen und Mehrfachkanten enthält.
- Ein Kreis, auf dem alle Kanten des Graphen genau einmal durchlaufen werden.
- Ein Weg, auf dem alle Knoten des Graphen genau einmal besucht werden.
- Der *Grad* $\text{grad}(u)$ eines Knotens u ist die Anzahl der Kanten, bei denen u als einer der Endknoten auftritt.
- Ein schlichter Graph heißt *Wald* (forest) genau dann wenn er keinen Kreis enthält. Im Grunde ist dies also ein Graph, dessen einzelne Zusammenhangskomponenten Bäume sind.
- Als Kuratowski-Graph bezeichnet man typischerweise die Graphen K_5 und $K_{3,3}$. K_5 (mit fünf Knoten) ist der kleinste, vollständige, nicht-ebene Graph. $K_{3,3}$ ist ein vollständiger bipartiter Graph mit 6 Knoten, von denen 3 Stück mit den anderen 3 vollständig verbunden sind, untereinander aber gar nicht (deswegen bipartit).



A 13.19 (L3) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit ein vollständiger Graph genau $n(n-1)/2$ Kanten hat?
- Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass ein vollständiger Graph mindestens $n(n-1)/2$ Kanten hat.
- Zeigen Sie: Jeder kreisfreie Graph mit n Knoten enthält höchstens $n-1$ Kanten.
- Auf welche Eigenschaft muss man die Adjazenzmatrix eines Graphen testen, um zu entscheiden, ob er schlingenfrei ist?
- Wie groß ist die minimale und wie groß ist die maximale Anzahl von Kanten eines schlichten, zusammenhängenden Graphen mit n Knoten?
- Wie viele Knoten hat ein ungerichteter, schlichter, vollständiger Graph mit 465 Kanten?
- Wie viele Kanten hat ein nicht-ebener, zusammenhängender Graph mit n Knoten mindestens?

Lösung

a) $n(n-1)/2$ ist die Mindestanzahl Kanten, die ein Graph mit n Knoten haben muss, damit er vollständig ist. Damit er exakt diese Anzahl hat, darf er keine parallelen Kanten und keine Schlingen enthalten, er muss also schlicht sein.

b) Induktionsbeginn $n = 1$: Der einfachste vollständige Graph mit einem Knoten besteht nur aus diesem Knoten selbst, hat also mindestens $n(n-1)/2 = 0$ Kanten \rightarrow korrekt.

Induktionsschluss: Wenn ein vollständiger Graph mit n Knoten mindestens $n(n-1)/2$ Kanten hat, muss ein Graph mit $n+1$ Knoten nach Annahme mindestens $(n+1)n/2$ Kanten haben.

Nimmt man zu einem Graphen mit n Knoten noch einen weiteren hinzu, so muss dieser mindestens durch eine Kante mit jedem bereits vorhandenen Knoten verbunden werden, es kommen also mindestens n Kanten hinzu:

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die Annahme ist folglich richtig.

c) Der Beweis erfolgt wieder durch vollständige Induktion.

Induktionsbeginn $n = 1$: Der kreisfreie Graph mit einem Knoten hat keine Kanten, die Annahme ist also richtig.

Induktionsschluss: Nimmt man in einem zusammenhängenden kreisfreien Graphen mit $n+1$ Knoten eine Kante heraus, so zerfällt dieser in zwei Zusammenhangskomponenten mit n_1 bzw. n_2 Knoten. Es gilt $n_1 + n_2 = n+1$. Jede der Zusammenhangskomponenten enthält höchstens n Knoten, d. h. nach Induktionsvoraussetzung $n_1 - 1$ bzw. $n_2 - 1$ Kanten. Der Originalgraph mit $n+1$ Knoten hatte eine Kante mehr, also insgesamt $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = n_1 + n_2 - 1 = n$ Kanten.

Die Annahme ist also richtig.

War der Graph nicht zusammenhängend (es gab also mindestens einen Knoten vom Grad 0), so ist die Argumentation wie oben, nur dass eine Zusammenhangskomponente in zwei Teile zerfällt.

d) In der Hauptdiagonalen müssen überall Nullen stehen.

e) Minimal: $n - 1$ Kanten (sonst ist er nicht zusammenhängend).

Maximal: Man erhält einen vollständigen (schlichten) Graphen, dieser hat $n(n-1)/2$ Kanten.

f) Auflösen von

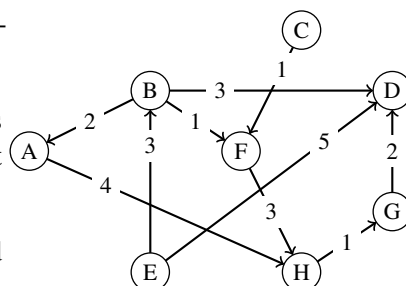
$$\frac{n(n-1)}{2} = 465$$

nach n ergibt $n = 31$. Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung ist negativ und damit nicht sinnvoll.

g) Aussagen über die Planarität von Graphen macht der Satz von Kuratowski. Die beiden in Aufgabe A 1.18 gezeigten Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind die kleinsten nicht-planaren Graphen, die es gibt. Jeder nicht-planare Graph enthält nach Kuratowski eine Unterteilung bestehend aus dem K_5 (10 Kanten) oder dem $K_{3,3}$ (9 Kanten). Beim Unterteilen eines Graphen nach Kuratowski kommen nur noch Kanten dazu, daher muss ein nicht-planarer Graph mindestens 9 Kanten besitzen.

A 13.20 (L3) Gegeben sei der unten gezeigte Graph.

- Geben Sie die Knotenliste und die Kantenliste an.
- Geben Sie den Forward Star an.
- Geben Sie die Adjazenz- und Erreichbarkeitsmatrix an.
- Listen Sie, beginnend mit Knoten E, die Knoten in der Reihenfolge gemäß Tiefensuche und Breitensuche auf.
- Zeichnen Sie den Graphen so um, dass die Knoten von links nach rechts in einer topologischen Sortierung angeordnet sind.
- Fassen Sie den Graphen als ungerichteten Graphen auf und geben Sie den minimalen Spannbaum an.
- Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf den Graphen zu: eben, zusammenhängend, stark zusammenhängend, kreisfrei, schlicht, gerichtet, vollständig, bewertet?



Lösung

a) Knotenliste Kantenliste

A	H
B	A, D, F
C	F
D	–
E	B, D
F	H
G	D
H	G

b) Zunächst werden die Knoten Indizes wie folgt zugeordnet:

A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	3	4	5	6	7	8

Die Speicherung als Forward Star sieht dann so aus:

Knotenindex i :	1	2	3	4	5	6	7	8	
Knotenliste K :	1	2	5	6	6	8	9	10	11
Nachfolgerliste N :	8	1	4	6	6	2	4	8	4

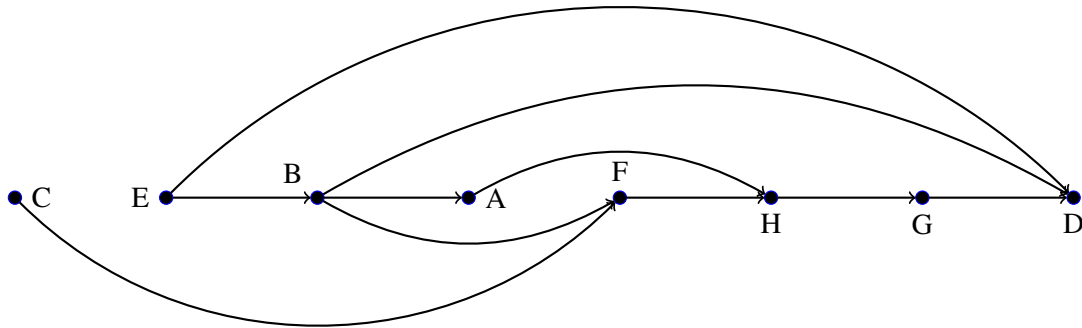
c) Adjazenzmatrix (Knoten in alphabetischer Reihenfolge):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

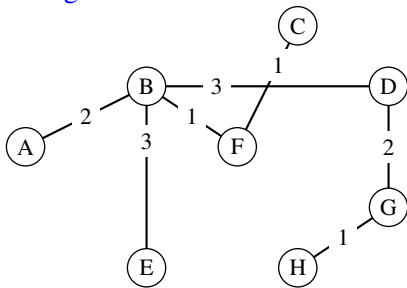
Die binäre Erreichbarkeitsmatrix wird über Potenzen von A bestimmt:

$$E_{\text{bin}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- d) Tiefensuche: EBAHGF D
- Breitensuche: EBD AFHG
- e) Topologische Sortierung:



f) Es ergibt sich:



g) Eigenschaften:	Ja	Nein
eben	X	
zusammenhängend	X	
stark zusammenhängend		X
kreisfrei	X	
schlicht	X	
gerichtet	X	
vollständig		X
bewertet	X	

A 13.21 (P2) Schreiben Sie eine C-Funktion zur topologischen Sortierung eines Digraphen mit n Knoten. Gegeben seien die Kantenliste als Array `klist` und die global deklarierte Adjazenzmatrix $a[n][n]$. Die Funktion soll als Ergebnis die Indizes der Knoten bezüglich `klist` in der sortierten Reihenfolge in ein Integer-Array `tlist` eintragen.

Lösung

```
#define DIM 20
int a[DIM][DIM];          // Global deklarierte Adjazenzmatrix

int tsort(int tlist[], int klist[], int n)
{
    int i, j, k = 0, grad[DIM];
    if(n < 1 || n >= DIM) return(-1);
    for(i = 0; i < n; i++) grad[i] = egrad(i);    // Alle Eingangsgrade
    for(i = 0; i < n; i++)
        if(grad[i] == 0) tlist[k++] = i;          // Vorbesetzen
    for(i = 0; i < n; i++)                        // Durchlaufen und Aufbauen von tlist
    {
        for(j = 0; j < n; j++)                    // Durchlaufe Zeile von Adjazenzm.
        {
            if(a[tlist[i]][j] > 0)               // Knoten tlist[i] hat Nachfolger
            {
                grad[j]--;                        // Dekrementiere Grad des Nachfolgers
                if(grad[j] == 0) tlist[k++] = j; // neuer Eintrag in tlist
            }
        }
    }
    return(k);
}
```